Beiträge zur Geschichte der Mathematik bei den Griechen und Arabern, von Dr. Heinrich Suter. Herausgegeben von Dr. Phil. Josef Frank.

Suter, H. (Heinrich), 1848-1922.
Erlangen, M. Mencke, 1922.

http://hdl.handle.net/2027/wu.89032392599



Abhandlungen
zur Geschichte der Naturwissenschaften
und der Medizin.
Schriftleiter: Prof. Dr. Oskar Schulz, Erlangen.
Heft IV.

Beiträge zur Geschichte der Mathematik bei den Griechen und Arabern

von

Dr. Heinrich Suter
weiland Professor der Mathematik am Gymnasium zu Zürich.

Herausgegeben von Dr. phil. Josef Frank
a. o. Professor an der landwirtschaftlichen Hochschule
in Weihenstephan.

Erlangen
Kommissionsverlag von Max Mencke.
1922.



Inhalt.

Printed in Germany



Zur Einführung.

Das vorliegende Heft enthält eine Reihe von Arbeiten von Herrn Professor Dr. Heinrich Suter, der sich in ungewöhnlichem Maße um die Geschichte der Mathematik und Astronomie im islamischen Kulturkreis verdient gemacht hat. Er konnte dies, da er sowohl die orientalischen Sprachen als auch die mathematischen Wissenschaften vollkommen beherrschte. Einmal hat er uns durch eine Anzahl von kleineren Arbeiten mit Einzelleistungen der damaligen Zeit bekannt gemacht, dann verdanken wir ihm eine Übersetzung der Mathematikerverzeichnisse im Fihrist des Ibn Abî Jâ'qûb an-Nadîm. Gar nicht hoch genug ist aber sein Werk „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke" zu schätzen; in ihm hat Suter, soweit dies überhaupt möglich war, aus abendländischen und orientalischen Quellen alle Angaben über irgendwie beachtenswerte Mathematiker und Astronomen gesammelt und kritisch in der Weise verarbeitet, daß er zunächst einen kurzen Abriß von dem Leben der einzelnen Gelehrten gab und daran anschließend die Titel ihrer Werke unter Angabe der Handschriften, soweit sie noch vorhanden sind, mitteilte. Am Schluß des Werkes schildert Suter in großzügiger Weise die Entwicklung der Astronomie und Mathematik im Orient. Diese Darstellung läßt uns erst recht erkennen, welchen Verlust die Wissenschaft dadurch erleidet, daß es Suter in Folge der wirtschaftlichen Verhältnisse nicht möglich war, auf Grund seiner Einzeluntersuchungen eine große Geschichte der Astronomie und Mathematik herauszugeben. — Hoffentlich gelingt es aber wenigstens die von ihm gesammelten Nachträge zu dem obigen Werk allgemein zugänglich zu machen.

Leider hat Herr Professor Suter die Vollendung dieser Sammlung seiner letzten Abhandlungen nicht mehr erleben dürfen, da er am 17. März 1922 seinen Angehörigen, seinen Freunden und der Wissenschaft nur allzufrüh entrissen worden ist. Zu meiner großen Freude hat aber Herr Professor Dr. J. Frank, mein langjähriger treuer Mitarbeiter, der schon die ersten Bogen durchgesehen hatte, sich der Mühe unterzogen, die letzte vom Verfasser nur im Entwurf fertiggestellte Abhandlung druckfertig zu machen und sie dadurch der Wissenschaft zu erhalten.

Im Folgenden ist zunächst eine kurze Autobiographie, die Herr Professor Suter mir auf meine Bitte zur Verfügung gestellt hat, gegeben und daran anschließend ein Verzeichnis seiner Schriften.

E. Wiedemann.



Lebenslauf.

Ich wurde geboren zu Hedingen, Kanton Zürich, am 4. Jan. 1848, besuchte die dortige Primar- und Sekundarschule, hierauf die obere Realschule in Zürich. Da ich dort bald, indem ich mich hauptsächlich für die Geschichte der Wissenschaften interessierte, den Mangel der Kenntnis der alten Sprachen fühlte, nahm ich Privatunterricht in Latein und Griechisch, absolvierte die Maturität im Herbst 1866, studierte hierauf an der Universität und an dem Polytechnikum in Zürich sowie an der Universität Berlin (unter Weierstraß, Kummer und Kronecker) Mathematik. Nach Zürich 1870 bei Beginn des deutsch-franz. Krieges zurückgekehrt, promovierte ich im Dez. 1871 mit der Arbeit: Geschichte der mathematischen Wissenschaften, I. Teil: Von den ältesten Zeiten bis Ende des 16. Jahrhunderts, welche Arbeit ich im Jahre 1875 fortsetzte mit dem II. Teil: Geschichte der math. Wissenschaften von Anfang des 17. Jahrhunderts bis gegen das Ende des 18. Jahrhunderts.

Im Jahre 1874 erhielt ich eine Vikarstelle am Gymnasium Schaffhausen. 1875 eine eben solche am Gymnasium St. Gallen und 1876 eine definitive Anstellung an der Kantonschule (Gymnasium und Realschule) in Aarau.

Im Frühjahr 1875 hatte ich mich mit Frau H. Müller-Frauenfelder verehelicht, aus welcher Ehe 3 Töchter entsprangen, die alle mit der Mutter noch am Leben sind.

Im Jahre 1886 wurde ich als Lehrer der Mathematik an das Gymnasium in Zürich gewählt und wirkte dort 32 Jahre lang; 1918 nahm ich den Rücktritt von der Lehrstelle und hielt mich seither in Küsnacht, Arlesheim und Dornach bei meinen Töchtern auf, wo ich meine wissenschaftlichen Arbeiten noch eine Zeit lang fortsetzen konnte. Diese bestanden, seit ich im Jahre 1887 mit dem Erlernen der arabischen Sprache unter den Professoren Steiner und Hausheer in Zürich begonnen hatte, hauptsächlich im Studium der arabischen Mathematik und Astronomie, über die ich im Laufe der Jahre eine Reihe von Abhandlungen veröffentlicht habe.

In Anerkennung dieser meiner Arbeiten wurde ich am 18. Nov. 1921 zum korrespondierenden Mitglied der physikalisch-medizinischen Gesellschaft zu Erlangen ernannt, und am 19. Dez. 1921 wurde mir von der I. Sektion der philosophischen Fakultät Zürich der Doktortitel honoris causa verliehen; beide Ehrungen haben mich sehr gefreut, und ich verdanke sie auch hier nochmals herzlich.

Eine besondere Genugtuung ist es mir, daß meine ganz oder fast vollständig abgeschlossenen Arbeiten noch veröffentlicht werden. Für die Unterstützung bei deren Herausgabe möchte ich Herrn Professor Dr. E. Wiedemann und vor allem Herrn Privatdozenten Dr. Frank auch an dieser Stelle bestens danken. Sollte es sich auch noch ermöglichen lassen, daß die von mir und anderen zu meinen „Mathematikern und Astronomen“ gesammelten Nachträge erscheinen könnten, so würde ich darin eine wesentliche Ergänzung meiner bisherigen historischen Forschungen erblicken.

Heinrich Suter.

Verzeichnis der Veröffentlichungen.

1. Geschichte der math. Wissenschaften
   I. Teil: Von den ältesten Zeiten bis Ende des 16. Jahrh. (Dissertation 1871). Zweite Auflage. Zürich, Orell Füssli u. Co. 1873.
2. II. Teil: Vom Anfange des 17. bis gegen Ende des 18. Jahrh. Zürich, Orell Füssli u. Co. 1875.
3. Das Mathematiker-Verzeichnis im Fihrist des Ibn Abî Ja'qûb an-Nadîm. Abhdl. z. Gesch. d. math. Wissensch. Heft 6. 1892.
4. Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. Abhdl. z. Gesch. d. math. Wissensch. Heft 10. 1900.
5. Nachträge und Berichtigungen zu „Die Mathematiker und Astronomen u. s. w.". Abhdl. z. Gesch. d. math. Wissensch. Heft 14. 1902.
6. Die Herausgabe der astronomischen Tafeln des Muḥ. ibn Mûsâ âl-Khwârizmî u. s. w. D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter 7. Raekke. Historisk og Filosofisk Afd. III. 1. 1914.

Ferner erschienen in:

Bibliotheca mathematica.

1. Die mathematischen und naturphilosophischen Disputationen an der Universität Leipzig 1512 bis 1526. [2], 3, 17. 1889.
2. Bibliographische Notiz über die math.-historischen Studien in der Schweiz. [2], 4. 97. 1890.
3. Einiges von Naṣîr ed-Dîn's Euklidausgabe. [2], 6, 3. 1892.
4. Zur Geschichte der Trigonometrie. (Naṣîr ed-Dîn's schakl el-kattâ', Transversalensatz des Menelaus.) [2], 7, 1. 1893.
5. Zur Frage über Josephus sapiens. [2], 8, 84. 1894.
6. Zur Geschichte des Jakobsstabes. [2], 9, 13. 1895.
7. Nochmals der Jakobsstab. [2], 10, 13. 1896.
8. Einige Beiträge zur Geschichte der arabischen Mathematiker u. Astronomen. [2], 11, 83. 1897.
9. Über zwei arab. Mss. der Berliner kgl. Bibliothek. [2], 12, 73. 1898.
10. Notizen über arabische Mathematiker u. Astronomen [2], 13, 86 u. 118. 1899.
11. Das Rechenbuch des Abû Zakavîjâ el-Ḥaṣṣâr. [3], 2, 12. 1901.
12. Über die angebliche Verstümmlung griechischer Eigennamen durch arab. Übersetzer. [3], 3, 408. 1902.
13. Über die Geometrie der Söhne des Mûsâ b. Schâkir. [3], 3, 259. 1902.
14. Über die im Liber augmenti et diminutionis vorkommenden Autoren. [3], 3, 350. 1902.
15. Über einige nicht sicher gestellte Autorennamen in den Übersetzungen des Gerhard von Cremona. [3], 4, 19. 1903.
16. Der Verfasser des Buches „Gründe der Tafeln des Chowarezmî". [3], 4, 127. 1903.
17. Zu dem Buche „De superficierum divisionibus" des Muḥammed Bagdadimus. [3], 6, 321. 1905.
18. Über die Bedeutung des Ausdruckes „Regula colci". [3], 6, 112. 1905.
19. Zur Frage des von Nairîzî zitierten Mathematikers Diachasimus. [3], 7, 396. 1906/07.
20. Über das Rechenbuch des 'Alî b. Aḥmed el-Nasawî. [3], 7, 113. 1906/07.
21. Über den Kommentar des Muḥammed b. 'Abdelbâqî zum 10. Buche des Euklides. [3], 7, 234. 1906/07.



22. Einige geometrische Aufgaben bei arabischen Mathematikern. [3], **8**, 23. 1907/08.
23. Die Abhandlung Qostâ b. Lûqâ's und zwei andere anonyme über die Rechnung mit zwei Fehlern und mit der angenommenen Zahl. [3], **9**, 111. 1908/09.
24. Eine indische Methode der Berechnung der Kugeloberfläche. [3], **9**, 196. 1908/09.
25. Die Abhandlung des Abû Kâmil Schoğâ' b. Aslam über das „Fünfeck u. Zehneck". [3], **10**, 15. 1909/10.
26. Zur Trigonometrie der Araber. [3], **10**, 156. 1909/10.
27. Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise von Abu'l-Raiḥân Muḥammed el-Bîrûnî. [3], **11**, 11. 1910/11.
28. Die Abhandlung über die Ausmessung des Paraboloides von el-Ḥasan b. el-Ḥasan b. el-Haitham. [3], **12**, 289. 1911/12.
29. Rezension über C. A. Nallinos Ausgabe von el-Battânî's Opus astronomicum, III. T. (arab. Text). [3], **1**, 285. 1900.
30. Rezension von Lipperts Ausgabe des Ibn el-Qiftî. [3], **4**, 293. 1903.
31. Rezension von C.A. Nallinos Ausgabe von el-Battânî, I. T. [3], **5**. 78. 1904.
32. Rezension von H. Schönes Ausgabe von Heronis Alexandrini opera omnia. [3], **7**, 98. 1906/07.
33. Rezension von Max Schmidt: Zur Entstehung u. Terminologie der elementaren Mathematik. [3], **8**, 99. 1907/08.
34. Rezension von C.A. Nallinos Ausgabe von el-Battânî II. T. [3], **9**, 83. 1908/09.
35. Rezension von Besthorn u. Heiberg, Codex Leidensis 399, 1. (1900—1910). [3], **11**, 277. 1910/11.
36. Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abû Kâmil el-Miṣrî [3], **11**, 100. 1910/11.
37. Rezension von Nallinos Ta'rikh 'ilm al-falak 'ind al-'arab fi'l-qurûn al-wustâ (Geschichte der Astronomie bei den Arabern im Mittelalter). [3], **12**, 277. 1911/12.

Zeitschrift für Math. u. Phys., hist.-literar. Abt.

1. Der Tractatus „de quadratura circuli" des Albertus de Saxonia. **29**, 81. 1884.
2. Die Quaestio „de proportione dyametri quadrati ad costam eiusdem" des Albertus de Saxonia. **32**, **41**. 1887.
3. Der V. Band des Katalogs der arab. Bücher der vicekgl. Bibliothek in Kairo. **38**, 1, 41, 161. 1893.
4. Die Kreisquadratur des Ibn el-Haiṯam, arabisch u. deutsch. **44**, 33. 1899.
5. Der Loculus Archimedius od. das Syntemachion des Archimedes, arabisch u. deutsch. **44**, (Suppl. Heft) 491. 1899. (Cantorfestschrift).
6. Rezension v. Besthorns und Heibergs Ausgabe der arabischen Elemente Euklids aus Codex Leidensis 399, 1. I. Fascik. **38**, 192. 1893.
7. Rezension v. Besthorns u. Heibergs Ausgabe der arabischen Elemente Euklids aus Codex Leidensis 399. 1. II. Fascik. **44**, 60. 1899.

Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft

1. Rudloff u. Hochheim, Die Astronomie des Gaǵmînî. **47**, 718. 1893.
2. Bemerkungen zu H. Steinschneiders Abhandlung: Die arab. Übersetzungen aus dem Griechischen. **51**, 426. 1897.
3 Zur Frage über die Lebenszeit des Verfassers des Mulaḫḫaṣ fi'l hei'a, Maḥmûd b. Muḥ. b. 'Omar al Gaǵmînî. **53**, 539. 1899.
4. Berichtigung einer Etymologie K. Vollers. **57**, 576, 783. 1903.

Sitzungsberichte der phys.-med. Sozietät in Erlangen.

1. Über die Ausmessung der Parabel von Thâbit b. Kurrâ. **48/49**, 65. 1916/17.
2. Die Abhandlungen Thâbit b. Kurrâ's u Abû Sahl el-Kûhî's Über die Ausmessung der Paraboloide. **48/49**, 186. 1916/17.
3. Über Al-Bîrûnî und seine Schriften (Beiträge z. Gesch. der Naturwissenschaften LV), gem. mit E. Wiedemann. **52/53**, 55. 1920/21.



Sonstige Zeitschriften:

1. Über diophantische Gleichungen. Zeitschr. f. math. Unterricht v. Hofmann Bd. XVII, 104. 1886.
2. Die Mathematiker auf den Universitäten des Mittelalters. Wissenschaftl. Beilage z. Programm d. Kantonschule in Zürich. 1887.
3. Die Araber als Vermittler der Wissenschaften in deren Übergang vom Orient in den Okzident. Jahresheft 25 d. Vereins schweiz. Gymnasiallehrer. 1895. 2. Aufl. bei H. R. Sauerländer u. C. in Aarau. 1897.
4. Berichtigungen zu Arabische Mathematiker und Astronomen v. M. Steinschneider. Orientalische Literatur-Zeitung 6, Spalte 40—43. 1903.
5. Zur Geschichte der Mathematik bei den Indern und Arabern. Verhandl. d. 3. internationalen Math.-Kongr. in Heidelberg. S. 556. 1904.
6. Über die Ausmessung der Parabel von Ibrahîm b. Sinân b. Thâbit. Viertelsjahrschrift der Naturforschenden Ges. in Zürich 63, 214. 1918.
7. Rezension von Carra de Vaux's Ausgabe von Philon de Byzance, Le livre des appareils pneumatiques etc. Deutsche Literatur-Zeitung 24, 1553. 1903.)
8. Rezension von E. Wiedemann, Über die Uhren im Bereich der islam. Kultur. Der Islam 7, 257. 1916.
9. Rezension von Ruska, Zur ältesten arab. Algebra und Rechenkunst. Archiv f. Math. u. Phys. [3], 28, 55. 1919.
10. Beiträge zur Geschichte der Mathematik bei den Griechen und Arabern. Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin. Heft IV. Erlangen 1922. (d. h. in vorliegendem Heft.)



Beiträge

zu den Beziehungen Kaiser Friedrichs II. zu zeitgenössischen Gelehrten des Ostens und Westens, insbesondere zu dem arabischen Enzyklopädisten

Kemâl ed-din ibn Jûnis.

In Bd. XI, Heft 4 (1914) des Archivs für Kulturgeschichte veröffentlichte E. Wiedemann einen Beitrag zu den Beziehungen Friedrichs II. (1212—1250), zu arabischen Gelehrten. Hiezu geben wir im folgenden auf Wunsch des Verfassers eine Erweiterung, die wir den historischen und biographischen Quellenwerken der Araber, soweit sie uns bis jetzt zur Verfügung stehen, entnommen haben.

Friedrich II. interessierte sich sehr für wissenschaftliche Fragen, besonders aus den Gebieten der Philosophie, Physik und Astronomie. Nach den Berichten arabischer Autoren soll er eine Reihe von Fragen aus diesen Wissenschaften aufgestellt haben, deren Lösung er wünschte, und da es zu seiner Zeit im Abendlande nur wenige Gelehrte gab, die sich mit Fragen solcher Art, besonders aus den Gebieten der Physik und Astronomie, beschäftigten und solche zu lösen im stande waren, so wandte er sich nach dem Morgenlande, und zwar in erster Linie an einen Herrscher, mit dem er in näheren Beziehungen stand, den Ejjubiden *el-Mâlik el-Kâmil*[1]). Dieser legte die Probleme den damals im besten Rufe stehenden muslimischen Gelehrten vor Unter ihnen zeichnete sich besonders der bedeutende Korankenner und Rechtsgelehrte *Abû'l-Fatḥ*[2]) *Mûsâ b. Jûnis b. Muḥammed b. Man'a* aus, der den ehrenden Beinamen *Kemâl ed-dîn* (Vollkommenheit des Glaubens) hatte und gewöhnlich unter dem Namen *Kemâl ed-dîn ibn Jûnis* genannt wird. Dieser vielseitige Gelehrte, der auch Philosophie, Mathematik, Astronomie, Medizin beherrschte wie kaum ein zweiter seiner Zeit, ist daher von den bedeutenderen arabischen Biographen und Historikern, wie *Ibn Abî Uṣaibi'a*, *Ibn Challikân*, *Abûlfidâ* u. s. w., gebührend gewürdigt worden[3]).

1) Neffe Saladdins, regierte 1218—1238. In einem Vergleich trat er an Friedrich II. Jerusalem mit einem Landstrich bis Joppe ab. — Die Transskription von E. Wiedemann weicht etwas ab von der in meinem Buch „Die Mathematiker und Astronomen der Araber etc." in Abhandlungen z. Gesch. d. math. Wiss. X (1900).

2) *Ibn Abi Uṣaibi'a* hat *Abû Imrân*. 3) Vergl. auch H. Suter, l. c. S. 140—142.





Wir geben nun im folgenden eine Lebensbeschreibung dieses Mannes nach den genannten Quellen; wir folgen in erster Linie *Ibn Challikân*[1]) (*Wafajât el a'jân* = Tod der Vornehmen, Ausgabe von Kairo, 1892—93, II, 132ff.); Zusätze, die wir aus anderen Schriftstellern hinzufügen, sind als solche bezeichnet.

Kemâl ed-dîn ibn Jûnis wurde geboren in *Mosul* am 5. *Ṣafar* des Jahres 551 d. H. (30. März 1156); er studierte daselbst unter seinem Vater das Recht und die Theologie, begab sich dann 571 (1175/76) nach Bagdad an das Kollegium *el-Niẓâmijja* und arbeitete dort unter dem Repetitor *el-Sadîd el-Salamâsî (Ibn Chall.* hat *Salamânî);* er studierte hier die Grundzüge des Rechtes und die Rechtskontroversen, ebenso die Philologie unter *Kemâl ed-dîn Abû'l-Barakât 'Abderraḥmân b. Muḥammed el-Anbârî*[2]); vorher schon hatte er bei dem Scheich *Abû Bekr Jaḥjâ b Sa'dûn el-Qortubî* (d. h. von Cordova stammend) studiert und sich sehr ausgezeichnet. Hierauf wandte er sich wieder nach Mosul zurück und lehrte nach dem Tode seines Vaters in der Moschee, die nach dem Emir *Zein ed-dîn*, dem Herrn von Arbela, benannt ist. Diese Moschee habe ich *(Ibn Challikân)* gesehen, sie ist nach Art eines Kollegiums gebaut und heißt noch das *Kemâl*ische Kollegium, es erhielt diesen Namen, weil *Kemâl ed-dîn ibn Jûnis* so lange in demselben wirkte und zu ihm, als er berühmt geworden, von allen Seiten die Theologen herbeiströmten. In allen Gebieten zeigte er ein reiches Wissen und vereinigte in sich die Kenntnis so vieler Disziplinen wie selten einer. Er zeichnete sich besonders auch in den mathematischen Wissenschaften aus. Ich sah ihn in Mosul im Monat Ramaḍân 626 (1229) und bin öfters bei ihm ein- und ausgegangen, da zwischen ihm und meinem Vater innige Freundschaft bestanden hatte. Es kam mir freilich nicht zu, Unterricht von ihm zu empfangen, denn ich blieb nicht lange in Mosul, sondern verreiste bald wieder nach Syrien. Die Theologen behaupten, daß er eine genaue Kenntnis von 24 Disziplinen hatte, zu diesen gehörte das Schâfiitische Recht[3]), hierin war er der erste seiner Zeit; es gab aber auch eine Menge von Ḥanefiten[4]), welche bei ihm ihr eigenes Recht hörten. Er war ein vollkommener Kenner der juridischen Polemik von (d. h. zwischen) *'Irâq* und *Buchâra*, er kannte die Grundlagen des Rechtes und des Glaubens (der Religion). Nachdem die Werke *Fachr ed-dîn el-Râzî's*[5]) nach *Mosul* gelangt waren, da verstand die technischen Ausdrücke darin keiner außer *Kemâl ed-dîn*. Er wurde mit dem *Irschâd* (= richtige Leitung) des *'Amîdî*, als er sich mit ihm beschäftigte, in einer Nacht fertig und ließ ihn dann durch seine Schüler lesen, wie behauptet wird. Er war bewandert in der Logik, Philosophie, Metaphysik, Physik und Medizin, er kannte die mathematischen Wissenschaften, den Euklid und die Astronomie, die Kegelschnitte (des Appollonius), die mittleren

1) *Ibn Challikân* wurde geboren 1211 zu Arbela und starb 1282 in Kairo.

2) Gest. 1181, vergl. Brockelmann, Gesch. d. arab. Literatur, I, 281.

3) Der Rechtsgelehrte *el-Schâfi'î*, der Begründer einer der vier Hauptrechtsschulen der Araber, lebte von 767—820, er starb in *Fosṭâṭ* (Alt-Kairo).

4) *Abû Ḥanifa*, der Begründer der ältesten der vier Rechtsschulen lebte, von 680(?)—767.

5) Vergl. H. Suter, l. c., S. 132; er starb 1210.



Bücher[1]) und den Almagest (des Ptolemäus), ebenso die verschiedenen Arten der Rechenkunst, nämlich die Algebra, die Arithmetik und die Regel der beiden Fehler, dann die Musik und die Ausmessung der Figuren, eine Disziplin, in welcher er nicht seinesgleichen hatte, ausgenommen in der oberflächlichen Kenntnis dieser Dinge, ohne ihre tiefere Ergründung und Wahrheit.

Zu dieser speziellen Disziplin fügt *el-Qazwînî*[2]) hinzu[3]): „Von dem wunderbaren, was ich von ihm *(Kemâl ed-dîn)* hörte, war das, daß die Franken zur Zeit des *Melik el-Kâmil* nach Syrien Probleme sandten, deren Lösung sie von ihm verlangten, darunter befanden sich medizinische, philosophische und mathematische; die medizinischen und philosophischen lösten die Gelehrten Syriens selbst, den mathematischen waren sie nicht gewachsen. Aber der *Melik el-Kâmil* verlangte, daß alle gelöst würden, und so sandte er sie nach Mosul an *Mufaḍḍal b. ʻOmar el Abahrî*[4]), unsern Lehrer, er war ohnegleichen in den geometrischen Wissenschaften, aber die Lösung war ihm doch zu schwierig, er zeigte das Problem dem Scheich *Ibn Jûnis*, dieser dachte darüber nach und löste es; die Aufgabe ist diese: Es sei ein Bogen gegeben, man ziehe seine Sehne und verlängere sie über den Bogen hinaus und konstruiere auf der verlängerten Sehne ein Quadrat, dessen Fläche gleich derjenigen des Bogenstückes (d. h. Segmentes)[5]) sei, folgendes ist die Figur:



El-Mufaḍḍal fand den Beweis dazu, machte eine Abhandlung daraus und sandte sie nach Syrien an *el-Melik el-Kâmil*. Als ich *(Qazwînî)* nach Syrien kam, traf ich die vortrefflichsten Gelehrten in Verwunderung über die Abhandlung, sie lobten auch die Auffindung des Beweises, denn er war ein seltenes Erzeugnis jener Zeit"[6]).

Ibn Challikân fährt fort: Er fand auch in der Wissenschaft der Amulette und magischen Quadrate Verfahren (Wege), auf welche bisher niemand gekommen war. Er machte auch Studien in der arabischen Grammatik und Sprache, und zwar so vollkommene, daß er ismtande war, das Buch des *Sîbaweih*[7]), *Îḍâḥ* und

1) Es sind dies die mathem. und astron. Schriften, die man nach den Elementen des Euklides studieren mußte, bevor man mit dem Studium des Almagestes beginnen konnte. (Vgl. M. Steinschneider, Z. S. für Math. und Phys. 10, 461. 1865).

2) Der berühmte Geograph, lebte von 1203–1283.

3) In *âthâr el-bilâd wa achbâr el-ʻibâd* (die Denkwürdigkeiten der Länder und die Geschichten der Menschen) Göttingen 1848, S. 310.

4) Vergl. H. Suter, l. c., S. 145; die *Nisbe* wird auch *Abhari* gelesen; er starb um 1260.

5) *Muqawwas* ist hier mit „Kreissegment" zu übersetzen.

6) Von der oben erwähnten Aufgabe wissen wir seit den Untersuchungen von F. Lindemann und den sich daran anschließenden, daß sie nicht streng mit Zirkel und Lineal (und nicht einmal unter Zuhilfenahme algebraischer Prozesse) für jeden Bogen zu lösen ist. Da aber kein Grund dafür vorliegt, die Nachricht für falsch zu halten, so hat wohl *Ibn Jûnis* eine Nährungsformel, sei es für das Segment selbst, sei es für die Rektifikation des zugehörigen Bogens, benutzt und dann diese in sinnreicher Weise für die Umwandlung des Segmentes in das Quadrat angewendet. (Zu solchen Näherungsformeln vgl. u. a. Th. Vahlen, Konstruktionen und Approximationen. B. G. Teubner 1911).

7) Berühmter arab. Grammatiker, gest. um 795; vgl. Brockelmann, l. c., I, 101.

die *Takmila des Abû 'Alî el-Fârisî*[1]) und den *Mufaṣṣal* des *Zamachschârî*[2]) vorzutragen. In der Interpretation des Korans und in der Traditionswissenschaft, in der Namenkenntnis (von Männern der Geschichte) hatte er eine große Sicherheit; er kannte auch sehr gut die Epochen und Tage der arabischen Geschichte, ihre Schlachten, viele Poesien und Gespräche. Juden und Christen hörten bei ihm die *Tôra* und das Evangelium, er erklärte ihnen diese Schriften so gut, daß sie anerkennen mußten, sie würden keinen finden, der ihnen diese Bücher so auslegen könnte wie er. Er war in jeder Disziplin so bewandert, wie wenn er nur diese allein studiert hätte. Im Jahre 625 d. H. (1228) kam der Scheich *Athîr ed-dîn el-Mufaḍḍal b. 'Omar el-Abahrî*, der Verfasser der *Taʿlîqa fî'l-chilâf* (Glossen zu den Kontroversen), der astronomischen Tafeln und anderer berühmter Werke, von Mosul nach Arbela zu uns und stieg in der *Dâr el-ḥadîth* (Schule der Tradition) ab, ich arbeitete dann unter ihm an den Kontroversen. Eines Tages war ich bei ihm, als zu ihm einer der Rechtsgelehrten von Bagdad kam, der sehr bewandert in seinem Fache war, man sprach eine Zeit lang über Traditionen, da kam das Gespräch auf den Scheich *Kemâl ed-dîn*, und es sagte *Athîr ed-dîn* zu dem Besucher: „Als der Scheich *Kemâl ed-dîn* seine Pilgerfahrt machte und nach Bagdad kam, warst du damals dort?" Er bejahte es. Er fragte dann weiter: „Wie wurde er beim hohen Dîwân empfangen?" Der Besucher antwortete: „Sie behandelten diesen *Faqîh*[3]) nicht nach seinem Verdienste." Da sprach *Athîr ed-dîn*: „Das ist zu verwundern, bei Gott! Nie trat ein Würdigerer als er in Bagdad ein!" Diese Worte setzten mich in Erstaunen, und ich sprach zu ihm: „Oh Herr! wie hast du gesagt?" Er sprach: „Oh mein Sohn! Nie kehrte vorher in Bagdad einer ein, der dem *Abû Ḥâmid el-Ġazâlî*[4]) zu vergleichen wäre, und bei Gott, dieser ist nicht zu vergleichen mit dem Scheich *(Kemâl ed-dîn)*".[5]) Es stand *Athîr ed dîn* auf dem Gipfel seines Ruhmes, als er noch das Buch in die Hand nahm und sich zu seinen Füßen setzte und von ihm Belehrung empfing, und zur selben Zeit beschäftigten sich die Studierenden mit den Werken *Athîr ed-dîns*, was ich mit eigenen Augen gesehen habe. Er *(Athîr ed-dîn)* las noch unter *Kemâl ed-dîn* den Almagest. Es erzählte mir einer der Rechtsgelehrten, daß er den *Kemâl ed-dîn* über *Athîr ed-dîn* befragt habe und über seine Stellung in den Wissenschaften, er antwortete: „Ich weiß es nicht". Da sprach der Rechtsgelehrte: „Wie ist das möglich, oh Herr, er arbeitet doch seit einer Reihe von Jahren unter dir?" Er antwortete: „Der Grund ist der, daß, so oft ich auch ihn gefragt habe, ob er die Sache verstanden, er immer geantwortet hat: ja, mein Herr! und nie unterhielt er sich mit mir über eine Streitfrage, so

1) Brockelmann, l. c., I, 113 hat *al-Fasawi*; beides ist richtig, der erstere heißt „der Perser", das zweite kommt von *Fasâ* in Persien, seiner Geburtsstadt; er starb in Bagdad 987.

2) Berühmter Grammatiker, starb 1143; vergl. Brockelmann, l. c., I, 289.

3) Gelehrter (Doktor) in Recht u. Theologie.

4) Der berühmte orthodoxe arabische Philosoph, der Verfasser des Buches „Vernichtung d. Philosophen" *(Tahâfut al-falâsifa)*, lebte 1059—1111; vgl. Brockelmann, l. c., I, 419.

5) Dies ist jedenfalls eine starke Übertreibung.



daß ich mich von seiner Tüchtigkeit hätte überzeugen können". Es besteht kein Zweifel, daß er *(Athîr ed-dîn)* gegenüber *Kemâl ed-dîn* sich so benahm aus Höflichkeit (guter Erziehung); er war Repetitor unter ihm an der *Bedrijja*-Schule, und er pflegte zu sagen: „Ich habe mein Heimatland nur verlassen und mich nach Mosul begeben, um unter dem Scheich zu arbeiten." — Wer sich nur an diesen Artikel hält, mag mir Unwahrheit (Übertreibung) in dem, was ich von dem Scheich sagte, vorwerfen, wer aber aus jenem Lande ist und weiß, was der Scheich für dasselbe war, der weiß auch, daß ich ihm nicht Eigenschaften (die er nicht hatte) zugeschrieben habe, wir verwahren uns, bei Gott!, vor Übertreibung und leichtsinniger Überlieferung. Es erwähnt ihn auch *Abû'l-Barakât el-Mubârak b. el-Mustaufî*, wenn er in seiner Chronik von Arbela sagt: „Er war weise, bahnbrechend in jeder Wissenschaft, besonders in denen der Alten, wie Logik, Geometrie u. a. Das beweisen die Lösungen der Schwierigkeiten im Euklides und Almagest für den Scheich *Scharaf ed dîn el Muẓaffar b. el-Muẓaffar el-Ṭûsî el-Qârî* (Koranleser), den Erfinder des Linear-Astrolabiums, bekannt unter dem Namen „der Stab" *(al-'aṣâ)*"[1]). Ferner sagt *Ibn el-Mustaufî*: „Es kamen ihm Fragen zu aus Bagdad über schwierige Partien dieser Wissenschaft, die er löste (sie kamen ihm nur gering vor), und für die er die Beweise fand". Ebenso sagt er: „Er rezitierte mir folgende seiner Verse, die er an den Statthalter von Mosul sandte, ihn um Fürsprache (oder seine Gunst) bittend":

Wenn je ein Land durch seinen Beherrscher hervorgeleuchtet hat,
so hat das Königreich der Welt durch dich seinen Glanz erlangt;
Durch die Dauer der Jahrhunderte bleibe deine Herrschaft unumschränkt,
deine Bestrebungen anerkannt und dein Urteil gerecht!
Es ist dir die Macht verliehen worden zum Schutze dieses Landes,
gleichwie Joseph in seiner Macht hatte die Städte Pharaos.

Im Jahre 633 d. H. (1235/36) war ich in Damaskus, wo damals ein Mann lebte, der in den mathematischen Wissenschaften sich auszeichnete; er fand einige schwierige Stellen in arithmetischen, algebraischen und Vermessungs-Aufgaben und im Euklid, diese schrieb er alle auf ein Blatt und sandte sie nach Mosul, nach einigen Monaten kam die Antwort zurück, und das Rätselhafte und Verborgene war enthüllt und klargemacht. Am Ende der Antwort schrieb er *(Kemâl ed-dîn)* noch, er möge das Ungenügende der Antwort entschuldigen, denn sein Geist (Genie) sei steif und sein Scharfsinn matt, die Vergeßlichkeit habe sich ihrer bemächtigt, und die Ereignisse der Zeit hätten ihnen mitgespielt, und vieles von dem, was er einst gelernt habe, habe er vergessen, wie wenn er es nie gelernt hätte. Der Fragesteller sagte mir, er habe nie eine solche Sprache gehört, außer von den Alten, die in diesen Wissenschaften vollständig bewandert waren, das sei nicht die Sprache der Kinder unserer Zeit."

Über diese Aufgabenlösung durch *Kemâl ed-dîn ibn Jûnis* wollen wir noch einen dritten arabischen Gelehrten sprechen lassen; *Ibn Abî Uṣaibi'a* sagt in seinen

1) Vergl. E. Dorn in den Mémoires de l'acad. impér. des sciences de St. Pétersbourg, Sér. VIII, T. IX, Nr. 1, p. 87, u. Carra de Vaux im Journal asiatique, Nr. Mai-Juni 1895.



Geschichten der Ärzte (I, 306): „Es sagte mir der *Qâḍî Neǵm ed-dîn b. el Karîdî:* es erzählte mir der *Qâḍî Ǵelâl ed dîn el-Baǵdâdî*„ ein Schüler von *Kemâl ed-dîn*, daß, während er die Vorlesungen *Kemâl ed-dîns* hörte, zu *Bedr ed-dîn Lu'lû'* († 1259), dem Beherrscher (Statthalter) von Mosul, ein Gesandter des Frankenkönigs *Imbarûr* (= Imperator, d. i. Kaiser Friedrich II.), der sehr bewandert in den Wissenschaften war, mit Fragen (Problemen) aus der Wissenschaft der Gestirne und andern Gebieten kam, mit dem Wunsche, daß *Kemâl ed-dîn ibn Jûnis* dieselben beantworten (lösen) möchte. Da ließ der Herrscher von Mosul dem *Kemâl ed-dîn* Mitteilung hievon machen und ihm sagen, er möchte in seiner Kleidung und Haltung den Anstand wahren, und dies deshalb, weil er von *Ibn Jûnis* wußte, daß er stets abgetragene Kleider anzuziehen pflegte und sich um die Dinge der Welt gar nicht kümmerte; er antwortete ja. Dann erzählt *Ǵelâl ed-dîn* weiter: Ich war gerade bei ihm, als ihm gemeldet wurde, daß der Gesandte der Franken sich der *Medresa* [1]) nähere, da schickte er einen der Rechtsgelehrten ihm entgegen, und als der Gesandte zum Scheich herantrat, sahen wir, daß der Ort (die Stelle, der Boden) von den schönsten und kostbarsten griechischen Teppichen bedeckt war, und eine Menge von Sklaven neben ihm standen und viele Diener in schönem Schmuck. Sie begrüßten sich, und der Scheich schrieb ihm die Antworten zu sämtlichen Fragen auf[2]), und als der Gesandte wegging, verschwand vor unsern Augen wieder alles, was wir gesehen, und ich sprach zum Scheich: Oh Herr! wie wunderbar war alles, was wir soeben an Glanz und Pomp gesehen haben! Da lächelte er und sprach: „Oh *Baǵdâdî*, es war (nur) Dekoration“ [3]).

Ibn Challikân fährt fort: „Aber ich habe mich schon zu lange mit der Darlegung seines Wissens aufgehalten, und bei meinem Glauben! ich habe noch sehr abgekürzt. Als sein Bruder, der Scheich *'Imâd ed-dîn Muḥammed* gestorben war, wurde *Kemâl ed-dîn* an seiner Stelle zum Vorsteher der Schule *'Alâijja* ernannt, und nachdem die Schule *Qâhirijja* eröffnet worden war, wurde er als Direktor an diese versetzt und hierauf an die *Bedrijja* im *Dhûl Ḥiǵǵa* 620 (Ende 1223). Eines Tages waren in seinem Unterricht eine Anzahl Professoren zugegen, die alle den *Ṭailasân* [1]) trugen, unter ihnen *'Imâd ed-dîn Abû 'Alî 'Omar el-Ṣanhâǵî el-Leznî* der Grammatiker, der aus dem Stegreif folgende Verse vortrug:

Kemâl ed-dîn ist die Vollkommenheit in Wissen und Stellung,
weg mit den Anstrengungen, die nach deiner Größe streben!
Wenn irgendwo die Scharfsinnigsten zusammenkommen,
so ist es jedes Pflicht und Ziel, zu hören auf das, was du sprichst;

1) Höhere Schule Akademie.

2) Nach diesem Berichterstatter wären die Antworten auch gar schnell gefunden worden.

3) Im Text steht *huwa 'alam*, das letztere Wort ist wie der ganze Text nicht vokalisiert; *'ilm* = Wissen, Wissenschaft kann es wohl kaum heißen, so lese ich eben *'alam* = Fahne, Tuchstreifen und gebe es, um einen leidlichen Sinn herauszubringen, durch „Dekoration“ wieder, man könnte vielleicht auch übersetzen „das sind Fetzen“.

1) Ein dreieckiger Mantel, den die Rechts- und Theologieprofessoren als Auszeichnung oder Amtskleidung trugen.

Glaube nicht, daß sie aus Eigensinn mit dem *Ṭailasan* sich bekleideten,
nein, nur aus Bescheidenheit und Selbsterkenntnis.

Derselbe machte auch folgende Verse auf ihn:

Mosul zieht mit großer Schleppe einher,
stolz gegen alle übrigen Städte
auf seinen Tigris und seinen *Kemâl*; beide sind Heilmittel
für die Durstigen und die vom schwachen Geiste,
der Eine ist ein überfließender Strom, mit süßem Wasser,
der andere ein Ozean des Wissens.

Der Scheich *Kemâl ed-dîn* kam auch in den Verdacht des Unglaubens wegen seiner Vorliebe für die philosophischen Wissenschaften, und es befiel ihn zu gewissen Zeiten wegen der Herrschaft jener Ideen über ihn eine gewisse Nachlässigkeit; hierüber sagt *'Imâd ed-dîn*:

Ist es dir zu verdanken, daß die Gazelle nach ihrem Grollen
wieder gut und mein Freund geworden ist?
Ich gab ihr Wein mit Honig gemischt, so fein (leicht?) wie meine Verse
und so fein (leicht) wie der Glaube des *Ibn Jûnis*[1]).

Kemâl ed-dîn starb in Mosul am 14. Scha'bân 639 (17. Febr. 1242) und wurde auf dem nach seiner Familie (Stamm) benannten Gottesacker neben dem Gottesacker *Ġassân*, außerhalb des Tores *'Irâq*, begraben."

So weit *Ibn Challikân*. Dieser Autor führt keine Werke von *Ibn Jûnis* an, dagegen nennt *Ibn Abî Uṣaibi'a* (S. 308) folgende: Die Enthüllung der Schwierigkeiten und Verdeutlichung der schweren Fragen über die Auslegung des Korans. Das Buch der Winke und Räte in der Rechtswissenschaft, in zwei Bänden. Das Buch über die seltenen Worte im Kanon (des ?)[2]). Das Buch über die Grundlagen (des Rechtes). Das Buch der Quellen der Logik. Das Buch der Rätsel (?) in der Philosophie. Das Buch der Herrschergeheimnisse über die Gestirne (oder auch aus den Gestirnen?)[3]).

Zur Vervollständigung der Beziehungen Friedrichs II. zu orientalischen Gelehrten sei hier noch eine Stelle aus Bar-Hebraeus *(Abûlfaraǵ)* angeführt[4]):

1) Diese sind schwer zu übersetzen, und wir verstehen auch ihren Sinn nicht recht; Jos. v. Hammer, der überhaupt die arabischen Gedichte sehr frei übersetzt hat, überträgt diese Verse in seiner Literaturgeschichte, Bd. 7, S. 458 folgendermaßen: „Fürwahr, es kam zu mir das Reh bei Nacht, das bis zum Morgen treu bei mir gewacht, ich gab ihm einen Becher roten Wein, wie mein Gedicht und *Ibn Jûnis'* Glauben rein" So kann ich die Verse mit dem besten Willen nicht übersetzen. — Mac Guckin de Slane überträgt die Verse in seiner Übersetzung *Ibn Challikâns* (Bd. III, S. 472—473) so: I tell you seriously that the gazelle (the young beauty whom I loved and) who always used to frown (upon me) has consented to meet one and become my companion. I gave her wine mixed with (the honey of) her lips, (wine) light as my verses and light as the religious convictions of the son of Yûnas.

2) Wüstenfeld, Gesch. der arab. Ärzte, S. 129. hat *„Ibn Sînâ"*, was bei *Ibn Abî Uṣaibi'a* nicht steht.

3) Es scheint dies ein astrologisches Werk zu sein.

4) Ausgabe von Pocock (Oxford 1672) S. 521, lat. Übersetz. S. 341; Ausgabe von *Ṣâlhânî* (Beirût 1890) S. 477. Vgl. Suter, l. c., S. 137. Diese Stelle hat M. Steinschneider veröffentlicht in der Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd. 31 (1886). hist.-literar. Abtlg. S. 107—108



„*Thadhûrî*[1]) von Antiochia, ein jakobitischer Christ, vervollkommnete sich in Antiochia in der syrischen und griechischen Sprache und in den Wissenschaften der Alten, reiste dann nach Mosul und studierte unter *Kemâl ed-dîn ibn Jûnis* die Werke *al Fârâbîs* und *Ibn Sînâs*, den Euklides und den Almagest. Dann kehrte er nach Antiochia zurück, weilte aber nicht lange daselbst, weil er einsah, daß er in der Erlangung des Wissens hier nicht weiter käme, und begab sich zum zweiten Mal zu *Ibn Jûnis* nach Mosul und vertiefte hier noch sein Wissen. Dann begab er sich nach Bagdad und beschäftigte sich hier vor allem mit medizinischen Studien, indem er sich besonders auf die außergewöhnlichen und seltenen Gebiete derselben warf. Der Sultan *Alâ ed-dîn* wollte ihn in seine Dienste nehmen, fand ihn aber sonderbar und empfing ihn (deshalb) nicht freundlich. Da wandte er sich nach Armenien und trat in die Dienste Konstantins, des Sohnes des Königs *Ḥâtim* (oder *Ḥatum*)[2]), aber er fand ihre Gesellschaft (ihren Umgang) nicht angenehm und reiste deshalb mit einem daselbst sich aufhaltenden Gesandten des *Imbârûr* (imperator), des Königs der Franken, zu diesem, von dem er Wohltaten empfing und bei ihm sehr in Gunst stand, er gab ihm sogar die Stadt *Kamâhija* (?) zu Lehen. Aber trotzdem sich so seine Lage sehr verbessert und sein Gut sich sehr vermehrt hatte, sehnte er sich doch nach seinem Vaterland zurück, aber der König gewährte ihm diese Gunst nicht. So blieb er, bis ihm ein günstiger Moment, nämlich ein Ausrücken des Königs zu einem Feldzug nach dem Westen, die Erfüllung seines Wunsches zu ermöglichen schien. Er raffte seine Habe zusammen und bestieg mit einem seiner Diener ein Schiff und fuhr gegen *ʿAkkâ* (Acre). Auf der See erhob sich ein (ungünstiger) Wind und trieb sie nach einer Stadt, vor der der König gerade Anker geworfen hatte. Als Theodorus dies gewahr wurde, nahm er Gift aus Scham, nicht etwa aus Furcht, denn der König hätte den Tod eines solchen Mannes nicht zugegeben".

Dieser Theodorus von Antiochia ist wohl der Meister Theodorus, der Philosoph Friedrichs II., der von Leonardo von Pisa erwähnt wird, der einen Brief an ihn geschickt hat über einige Aufgaben, die auf unbestimmte Gleichungen ersten Grades führen. Auch Theodorus hat dem Leonardo eine Aufgabe aus der unbestimmten Analytik zweiten Grades vorgelegt, die Leonardo in seinem Liber quadratorum gelöst hat[3]). — In den Werken Leonardos kommt noch ein anderer Philosoph Friedrichs II. vor, nämlich Johannes von Palermo, der wahrscheinlich etwas vorher, vielleicht auch noch gleichzeitig mit Theodorus, in den Diensten des Kaisers stand und ebenfalls mathematische Fragen an Leonardo gerichtet hat. Dies alles beweist, daß am Hofe Friedrichs II. ein reges wissenschaftliches Leben geherrscht hat, zu dem also sowohl abendländische als morgenländische Gelehrte ihren Beitrag gesteuert haben.

1) Ist wahrscheinlich Theodorus zu lesen, wie ich auch a. a. O. transskribiert habe.

2) „*Hathum*" bei A. Müller, Der Islâm im Morgen- u. Abendland, II, 228.

3) Vgl. Cantor, Vorl. über Gesch. d. Math. II (2. Aufl.) S. 46, 50. Theodorus korrespondierte wahrscheinlich mit dem jüdischen Gelehrten *Jehûda b. Salomo Kohen* aus Toledo arabisch über mathemat. Fragen; vgl. M. Steinschneider, Die arabische Literatur der Juden, S. 162, Nr. 117.



Der Kommentar
des Pappus zum X. Buche des Euklides
aus der arabischen Übersetzung des ***Abû 'Othmân al-Dimashkî***
ins Deutsche übertragen.

Einleitung.

Der gelehrte Herausgeber der Werke des Euklides, Archimedes, Apollonius und Ptolemäus, Herr Prof. J. L. Heiberg in Kopenhagen, hat schon i. J. 1882 in seinen „Literargeschichtliche Studien über Euklid" S. 171 bei Gelegenheit der Besprechung der noch in Paris vorhandenen arabischen Übersetzung des Kommentars des Pappus zum X. Buche des Euklides den Ausspruch getan: „Es wäre zu wünschen, dass eine vollständige Übersetzung des arabischen Textes endlich einmal erschiene."

Bekanntlich hatte schon F. Woepcke in den Mémoires prés. par div. sav. à l'académie des sciences, T. XIV (Paris 1856), p. 658—720 eine Arbeit über dieses arabische Ms. (Inhaltsangabe mit Übersetzung einiger kurzer Abschnitte) veröffentlicht. Merkwürdigerweise versteifte sich Woepcke auf die Idee, dieser Kommentar rühre von Vettius Valens, einem Astronomen zur Zeit des Ptolemäus, her; er stützte sich hiebei einzig auf den Umstand, daß der Name Pappus an andern Stellen arabischer Mss. durch Babus wiedergegeben sei, während er hier unvokalisiert Bls laute. In dieser Frage war nun Woepcke wirklich etwas zu subjektiv, welche Ansicht schon Flügel[1]) und Heiberg (l. c., S. 170) ausgesprochen haben; er veröffentlichte etwas später in Paris (s. a.) den arabischen Text dieses Kommentars aus dem Ms. 2457, 5^0 u. 6^0 (früher 952, 2^0, Suppl. arabe) der Bibliothèque nationale; dieser Veröffentlichung ist auch ein Faksimile des Titels beigegeben, und hier erscheint der Name sogar teilweise vokalisiert in der Form Bbus, allerdings ist das arabische b etwas hoch, so daß man auch Blus lesen kann, aber aus diesem „Valens" zu machen, ist gewiß bedeutend kühner als „Pappus" zu konjizieren. Dazu kommt nun noch, was wohl Woepcke noch nicht gewußt hat, daß nach dem Zeugnis von Proklus, Eutokius u. a. Pappus wirklich einen Kommentar zu Euklids Elementen verfaßt hat (vergl. Heiberg, Literargesch. Studien, S. 162—164), daß der arabische Fihrist zwischen Valens und Pappus genau unterscheidet und dem letzteren einen Kommentar zum

1) Ausgabe des Fihrist 1872, Bd. II, S. 124.



X. Buche des Euklides zuschreibt, und daß verschiedene uns erhaltene Scholien zu Euklids Elementen ziemlich gut mit den von Woepcke gemachten Inhaltsangaben unseres Kommentars stimmen (vergl. Heiberg l. c., S. 170 u. 171), so daß es kaum noch Gründe gibt, an der Autorschaft des Pappus für diesen Kommentar zu zweifeln. Und doch hält, trotz der triftigen Gründe, die schon vor mir Flügel[1]) und Heiberg (l. c., S. 170) angeführt haben, M. Cantor noch in der 3. Auflage seiner Vorlesungen (I, S. 348 und 425) an Vettius Valens als Verfasser dieses Kommentars fest. Ich will allerdings nicht verschweigen, daß gewisse Stellen der Übersetzung mich selbst etwas stutzig gemacht haben (s. w. unten), obwohl Pappus dieses geschrieben haben könnte, allein ich mußte mir sagen, daß es ja sehr wohl möglich sei, daß der Übersetzer den etwas schwer verständlichen Stoff nicht recht begriffen haben könnte, oder daß Zusätze von ihm selbst oder von spätern Abschreibern in den Text geraten sein möchten. Ich habe mir viele Mühe gegeben, aus der Vergleichung dieses Kommentars mit den von Hultsch herausgegebenen Collectiones Anhaltspunkte für einen gemeinsamen Verfasser beider Werke aufzufinden, doch führte diese Arbeit leider zu keinem befriedigenden Resultate; wenn der griechische Text des Kommentars noch vorhanden wäre, so wäre diese Untersuchung vielleicht fruchtbarer gewesen.

Was den Übersetzer dieses Kommentars aus dem Griechischen ins Arabische, *Abû ʿOthmân al-Dimashkî* (oder *Dimishkî* d. h. der Damaszener), anbetrifft, so vergleiche man für ihn meine Schrift „Die Mathematiker und Astronomen der Araber"[2]), S. 49; er wird so ungefähr von 870 bis 930 gelebt haben und war lange Zeit Arzt am Hofe des Khalifen *al-Muktadir* und Direktor eines Krankenhauses in Bagdad.

Der Grund, weshalb ich so lange mit der Übersetzung dieses Kommentars zugewartet habe, liegt hauptsächlich in der Schwierigkeit des behandelten Stoffes und besonders in dem Umstande, daß die Definitionen des Rationalen und Irrationalen und auch teilweise des Kommensurabeln und Inkommensurabeln bei den Griechen andere waren als zu heutiger Zeit. Es war daher auch sehr zeitgemäß, daß über diese Gebiete in den letzten Jahren recht gut orientierende Abhandlungen veröffentlicht worden sind, ich erinnere nur an die Schriften von Junge[3]), Vogt[4]), Zeuthen[5]) über die Entwicklungsgeschichte der Irrationalen, und an den von M. Curtze veröffentlichten Kommentar zum X. Buche des Euklides[6]) und meine Abhandlung[7]) über diesen Kommentar. Damit mußte

2) In Abhandlungen z. Gesch. d. mathem. Wissenschaften, X (1900).

3) Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt? in den Novae Symbolae Joachimicae. Halle 1907.

4) Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato etc. in der Biblioth. mathem. 10_3, 97. 1909/10).

5) Sur la constitution des livres arithm. des éléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité (Bulletin de l'acad. royale des sciences et des lettres de Danemark, 1910), u. Sur l'origine historique de la connaissance des quantités irrat. (ibid. 1915).

6) Euclidis Opera omnia, Suppl.: Aniritii in decem libros priores element. Euclidis Commentar. Lips. 1899, p. 252—386.

7) Biblioth. mathem. 7_3, S. 234—251. 1906.



natürlich ein eingehendes Studium des X. Buches parallel gehen, eine nicht ganz leichte und deshalb ermüdende Arbeit. — Es war nun natürlich auch für den arabischen Übersetzer, der in erster Linie Mediziner war, keine leichte Aufgabe, den Kommentars des Pappus, der nebenbei auch viel philosophisches Beiwerk enthält, in seiner Sprache in möglichst verständlicher Form wiederzugeben. Dazu kommt weiter noch, daß uns der Text der arabischen Übersetzung ziemlich verdorben überliefert worden ist; das beweisen besonders die vielen Randglossen, die oft andere, aber nicht immer die richtigen Lesarten enthalten, so daß Woepcke eine große Zahl von Konjekturen aufzustellen gezwungen war. Der Leser möge uns nun entschuldigen, wenn auch die deutsche Übersetzung ihm öfters schwer verständlich erscheinen mag[8]); es wird dies besonders bei den philosophischen Stellen der Fall sein, denn die Sprachtechnik der griechischen (wahrscheinlich neu-platonischen) sowohl als der arabischen Philosophie ist dem Übersetzer ganz ungenügend bekannt; um so klarer werden die rein mathematischen Partien des Werkes sich darstellen. Die Übersetzung ist bisweilen etwas frei gehalten, eine wörtliche hätte nur das Verständnis erschwert. Zusätze in runden Klammern sind Erläuterungen von meiner Seite oder drücken das vorhergehende Wort anders, d. h. bezeichnender aus oder geben die wörtliche Übersetzung, die im Deutschen nicht gut verwendbar wäre; Zusätze in eckigen Klammern enthalten Worte, bezw. Sätze, die im arabischen Texte absichtlich oder aus Versehen weggelassen sind, die aber behufs bessern Verständnisses zu ergänzen sind. In einem Anhang werde ich einige Zahlenbeispiele zu etwas schwierigern Sätzen des Textes geben, auch in den Fußnoten sind hier und da einige Beispiele beigefügt.

Wir schicken hier noch für diejenigen Leser, die mit den Euklidischen Begriffen des Rationalen und Irrationalen nicht vertraut sind, einige hierauf bezügliche Bemerkungen voraus.

Sind a und b zwei nach unseren Begriffen rationale Größen, so sind diese natürlich auch für Euklides rational und also auch kommensurabel; bei dem griechischen Mathematiker aber sind auch a und $\sqrt{b}$, oder $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ rationale Größen, aber diese sind in der Länge nicht kommensurabel (natürlich dürfen a und b keine Quadratzahlen sein), sondern nur in der Potenz (d. h. im Quadrat) also z. B. 5 und $\sqrt{6}$ oder $\sqrt{5}$ und $\sqrt{6}$ sind rationale Größen, nur in der Potenz kommensurabel. Es können also nach Euklid auch rationale Größen inkommensurabel sein, rational sind bei ihm also alle Linien, die in der Potenz rational sind. Wird nun von zwei bloß in der Potenz kommensurabeln Größen, also von a und $\sqrt{b}$ oder $\sqrt{a}$ und von $\sqrt{b}$ das geometrische Mittel genommen, so erhält man die erste irrationale Größe des Euklides, die sog. Mediallinie oder kurz Mediale, als $\sqrt{a\sqrt{b}}$, oder $\sqrt[4]{ab}$; werden jene Größen durch Addition verbunden, so erhält man die zweite irrationale Größe, das sog. Binomium, also $a + \sqrt{b}$ oder $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; werden sie durch Subtraktion verbunden, so erhält man die dritte irrationale Größe, die sog. Apotome, als $a - \sqrt{b}$ oder

8) Es gilt dies besonders von S. 17—25 meiner Übersetzung.



$\sqrt{a} - \sqrt{b}$. Diese drei Irrationallinien, die Mediale, das Binomium und die Apotome bilden nun die Grundlage der Euklidischen Theorie der irrationalen Größen. Wie das X. Buch und der Text des vorliegenden Kommentars zeigen, leitet nun Euklides durch Aufstellung einer Reihe von speziellen Bedingungen aus diesen drei fundamentalen Irrationalitäten eine größere Zahl neuer Irrationallinien ab, für die wir auf den Kommentar und besonders auch den Anhang verweisen.

Noch ist zu bemerken, daß Euklides jede dieser irrationalen Größen (wie natürlich auch die rationalen) durch eine Strecke darstellt, selbstverständlich gibt es dann auch rationale und irrationale Flächen (Rechtecke), wie z. B. ab, $a\sqrt{b}$ und $\sqrt{ab}$; die letzten beiden Flächen nennt nun Euklides mediale Flächen, sie sind also nicht rational, wie ab; hierin liegt eine für uns nicht ganz begreifliche Inkonsequenz des griechischen Mathematikers, denn wenn a und $\sqrt{b}$, oder $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ für ihn rationale Größen sind, so würde man erwarten, daß auch $a\sqrt{b}$ und $\sqrt{ab}$ für ihn rationale Recktecke wären; aber er geht eben von den Rechtecken aus, und weil nun ab ein rationales Rechteckt ist, so nennt er $\sqrt{ab}$ auch eine rationale Linie, und weil $a\sqrt{b}$, oder $\sqrt{ab}$ ein mediales Rechteck ist, so nennt er $\sqrt{a\sqrt{b}}$, oder $\sqrt[4]{ab}$ auch eine mediale (also irrationale) Linie.

Übersetzung des Textes.

I. Teil.

Der Zweck des X. Buches des Euklides über die Elemente [der Geometrie] ist die Untersuchuug der kommensurabeln und inkommensurabeln, der rationalen und irrationalen Größen. Diese Theorie (Wissenschaft) nahm ihren Anfang in der pythagoräischen Schule (Sekte) und wurde sehr befördert durch Theätetus den Athener, der in diesem Zweige der mathematischen Wissenschaften und in andern bedeutenden Scharfsinn entwickelte und dadurch die Bewunderung verdiente, die ihm zu teil wurde. Dabei gehörte er zu den ausgezeichneten Menschen sowohl in Bezug auf seine Naturanlage als auch in Bezug auf den Eifer, mit dem er sich der Aufsuchung der Wahrheiten in diesen Wissenschaften widmete, wie Plato davon Zeugnis gegeben hat in der Abhandlung, die er nach ihm benannt hat. Was die genauen Unterscheidungen und die scharfen Beweise zu denselben (den Sätzen über jene genannten Größen) anbetrifft, so glaube ich, daß sie hauptsächlich durch diesen Gelehrten (Mann) festgelegt worden sind. Nach ihm hat dann der große Apollonius, der den höchsten Grad der geistigen Kraft in den mathematischen Wissenschaften erreicht (S. 2) hat, seine Anstrengungen auf diese Dinge gerichtet und zu denselben bewundernswerte Zugaben geliefert. Denn Theätetus hatte die in der Länge kommensurabeln Potenzen von den inkommensurabeln unterschieden und hatte die bekannten Irrationallinien nach den Medietäten (den verschiedenen Mitteln) eingeteilt, indem er die Mediallinie dem geometrischen, das Binomium dem arithmetischen und die Apotome dem harmonischen Mittel zuteilte (d. h. durch diese Mittel entstanden erklärte), wie Eudemus der Peripatetiker [9]) berichtet hat. Was Euklides anbetrifft, so war sein Ziel wissenschaftlich unanfechtbare Regeln für die Kommensurabilität und Inkommensurabilität zu geben, ebenso stellte er strenge Definitionen und Unterscheidungsmerkmale für die rationalen und irrationalen Größen auf, errichtete die verschiedenen Ordnungen für die Irrationallinien, und setzte sie in ihrem ganzen Bereiche klar auseinander. Endlich hat Apollonius die Arten der geordneten Irrationallinien unterschieden [10]) und die Theorie der sog. ungeordneten Irrationallinien aufgestellt, von denen er eine große Zahl durch genaue Methoden abgeleitet hat [11]).

---

9) Arab. mashshâ' = Fußgänger.

10) Wahrscheinlich ist hier gemeint: „in etwas anderer Weise als sein Vorgänger Euklides", sonst wäre der Satz nicht verständlich.

11) Diesen Abschnitt von Anfang an bis hieher hatte schon Woepcke ins Französische übersetzt (an dem in der Einleitung angeführten Orte, S. 691—693).



Da dies nun der Zweck dieses Buches ist, so ist die Feststellung (der Nachweis) seines Nutzens nichts Überflüssiges; denn schon die Pythagoräer beschäftigten sich um ihrer selbst willen viel mit diesen Dingen, so daß ein Ausspruch unter ihnen sehr verbreitet war, nämlich der, daß der erste, welcher die Wissenschaft (Kenntnis) des Irrationalen (Stummen) oder Nichtrationalen erfand und sie öffentlich bekannt machte unter dem Volke, ertrunken sei; es ist wohl passender [zu sagen], daß sie nach Art der geheimnisvollen Rätselsprache[12]) damit sagen wollten, daß jedes Stumme oder Nichtaussprechbare oder Nichtvorstellbare im All am besten durch den Schleier (Vorhang) verhüllt bliebe, und daß jede Seele, wenn sie im Leben zur Offenbarung und Enthüllung dieser Dinge gelangt ist[13]), dann umherirrt (umherirren muß?) im Meer der Unähnlichkeit[14]), versunken in den Fluten des Geschaffenen, die keine Ordnung haben[15]). — Das ist, was die pythagoräische Schule und der athenische Gast[16]) meinten, die zum Eifer und zur Sorge für diese Dinge antrieben. Es ist das äußerste Maß von Dummheit (oder Unwissenheit) nötig für die, welche glauben, daß dies[17]) eine gemeine (geringe) Sache sei.

Da nun die Sache sich so verhält, so mag derjenige, welcher aus seiner Seele diesen Vorwurf (wörtlich diese Schande)[18]) zu verbannen sucht, diese Dinge (S. 3) von Plato lernen, wie er scharfsinnig das erkannt hat, was einen Vorwurf verdient (?), und er möge die Worte richtig erfassen, die wir uns hierüber vorgenommen haben (die wir im folgenden bringen werden), und er möge die wunderbare Auswahl der Gedanken betrachten, die Euklides zur Begründung der einzelnen Sätze [des X. Buches] zur Anwendung brachte; denn die Dinge, die wir hier zur Belehrung zu behandeln beabsichtigen, sind die besondern Eigenschaften, die den geometrischen Größen zukommen; das Inkommensurable und das Irrationale existiert nämlich nicht bei den Zahlen[19]), denn alle Zahlen sind rational und kommensurabel. Was aber die geometrischen Größen anbetrifft, so können sie bildlich dargestellt werden[20]); der Grund hiefür ist, daß die Zahlen stufenweise (nicht stetig) fortschreiten und stets um etwas zunehmen, was ein kleinstes ist (d. h. die Einheit), und so bis ins Unendliche fortschreiten, während die [geometrischen] Größen sich umgekehrt verhalten, d. h. in der Begrenzung (im Endlichen) anfangen und durch fortwährende Teilung ins unendlich kleine

12) Deren sich die Pythagoräer nach der Überlieferung oft bedient haben sollen.

13) Der Text ist hier schwer verständlich und, wie es scheint, etwas anders aufgefaßt als in dem griech. Scholium, das Heiberg (Eucl. Elementa V, S. 417, Z. 11–20) veröffentlicht hat. Dieses Scholium, wie noch andere zum X. Buche, scheint in der Tat dem Kommentar des Pappus entnommen zu sein, wie Heiberg schon vermutet hat.

14) D. h. wohl: sie findet nichts Ähnliches, Verwandtes.

15) Lebensordnung, Regel, Organisation.

16) Vergl. Auszug aus Platos Gesetzen bei H. Vogt (Bibl. mathem. 10_3, S. 136.

17) D. h. das Wissen vom Irrationalen und Inkommensurabeln.

18) Nämlich die Schande, daß er nichts vom Irrationalen und Inkommensurablen versteht.

19) Unter „Zahlen“ sind bei den griechischen Geometern immer „ganze Zahlen“ verstanden.

20) Oder auch „vorgestellt werden“, d. h. man kann sich eine Vorstellung davon machen.



übergehen können. Wenn also ein kleinstes bei den geometrischen Größen nicht existiert, so ist klar, daß kein Maß gefunden wird (werden kann), das ihnen allen gemeinsam ist, wie z. B. die Einheit gemeinsames Maß für die (alle) Zahlen ist; es ist also nicht anders möglich, als daß unter ihnen (d. h. den geometrischen Größen) kein kleinstes gefunden werde, und wenn also ein solches nicht gefunden wird, so ist es nicht möglich, daß die Kommensurabilität unter ihnen allen bestehe[21]. Wenn also jemand den Grund sucht[22], welches ein kleinstes in den diskreten Größen gefunden wird, nicht aber ein größtes, dagegen in den stetigen Größen ein größtes[23], nicht aber ein kleinstes, so wird man zu ihm sagen, daß die Beispiele für diese Dinge sich nur voneinander unterscheiden gemäß ihrer Gleichartigkeit mit dem Endlichen oder mit dem Unendlichen, weil bei jeder Vergleichung der existierenden Dinge es solche gibt, die ein Ende (eine Begrenzung) besitzen, und solche, die aus dem entstanden sind, was ohne Begrenzung ist, wie z. B. die Vergleichung (Gegenüberstellung) des Ähnlichen und Unähnlichen, des Gleichen und Ungleichen . . .[24]. Und was das Unähnliche und das Ungleiche und das Bewegte anbetrifft, so sind sie des Unendlichen fähig, und ähnlich verhält es sich mit andern Dingen; als Beispiel hiefür können wir die Einheit und die Vielheit nehmen und das Ganze und die Teile: denn in Bezug auf die Einheit und das Ganze ist es klar, daß sie beide zu dem Endlichen (Begrenzten) gehören, aber die Vielheit und die Teile gehören zur (S. 4) Klasse des Unendlichen (Unbegrenzten); deshalb ist die Einheit abgegrenzt in den Zahlen[25], denn das ist der Begriff der Einheit, die Vielheit aber geht über alle Grenzen hinaus. Was aber die geometrischen Größen anbetrifft, so ist die Sache umgekehrt: das Ganze (die Vielheit) hat eine Grenze, die Teile aber ergeben sich durch Teilung ohne Ende; denn bei den Zahlen entspricht (?) die Einheit der Vielheit[26], da die Zahl erreicht wird in der Vielheit, wie das Ding (Individuum?) seiner Gattung[27]. Die Einheit, die der Anfang der Zahl ist, sei sie nun die Eins selbst oder das erste von einer Anzahl von Dingen, hat den Namen „Eins". — Was aber die geometrischen Größen anbetrifft, so steht das Ganze dem Teil gegenüber, denn das Ganze kommt nur den stetigen Größen zu, die

21) Vergl. hiemit das Scholium bei Heiberg (Elementa V, S. 415, Z. 9, S. 416, Z. 3), und auch Knoche, Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus. Herford 1865, S. 21–22. Auch Stellen dieses Scholiums scheinen aus Pappus entnommen zu sein.

22) Was jetzt folgt, ist nur eine weitere Ausführung des Vorangegangenen, ist aber als ins Gebiet der philosophischen Spekulation gehörig nicht mehr recht zu verstehen und war auch schwer zu übersetzen.

23) Dies beweist, daß die Alten von unendlicher Ausdehnung der Raumgrößen keine Vorstellung hatten.

24) Hier befindet sich im Ms. eine nicht lesbare, verdorbene Stelle, wahrscheinlich soll es heißen: „des Ruhenden und des Bewegten"; das erste Wort ist noch lesbar, nach „Bewegten" folgte aber noch ein anderer Satz.

25) D. h. wohl die untere Grenze der Zahlen.

26) Man kann auch übersetzen: „steht die Einheit der Vielheit gegenüber".

27) D. h. also: die Einheit verhält sich zur Zahl, wie das Individuum zur Gattung.



Vielheit nur den diskreten. Mit diesen Dingen verhält es sich also so, wie wir es nun geschildert haben.

Es ist nun nötig, daß wir auch die Ordnung (Folge) der Ideen der Sätze[28]) Euklids genauer untersuchen, wie er zuerst mit den Dingen beginnt, welche notwendig am Anfang stehen müssen, dann übergeht zu den Mitteln (Medietäten) in ihrer Gesamtheit, in gleicher Anordnung, bis er konsequenterweise zum Abschluß des richtigen Weges kommt; d. h. er zeigt in den ersten Sätzen seines Buches die besonderen Eigenschaften der stetigen Größen, und die Ursachen der Inkommensurabilität. Diese sind: die Grundeigenschaft der stetigen Größen ist die, daß immer ein Teil gefunden werden kann, der kleiner ist als ein noch so klein angenommener[29]) Teil, und deshalb definiert man das Stetige als das, was bis ins Unendliche geteilt werden kann. Mit diesem Satze gewinnen wir auch den ersten Grund (die Grundlage) für die Inkommensurabilität, wie wir schon gesagt haben, und von dieser Stelle an beginnen seine umfassenden Untersuchungen über die Kommensurabilität und Inkommensurabilität; er unterscheidet durch wunderbare Beweise, was von diesen [Größen] kommensurabel in absolutem Sinne, was kommensurabel in der Länge und Potenz zugleich sei, was inkommensurabel in Bezug auf diese beiden zugleich sei, und was inkommensurabel in der Länge und kommensurabel in der Potenz sei, und zeigt, wie zu einer gegebenen Linie (Strecke) zwei inkommensurable Linien gefunden werden (S. 5) können, die eine bloß in der Länge, die andere in Länge und Potenz[30]). Hierauf betrachtet er das Kommensurable und Inkommensurable in gegenseitigem Verhältnis, in der Zusammensetzung und in der Teilung[31]), und zwar sucht er in seinen Ausführungen dieses alles genau zu ergründen und führt alles sicher durch bis zum Ende. Dann richtet er seine Betrachtungen auf diese Größen, indem er besonders das Rationale und Irrationale ins Auge faßt und zeigt, was von ihnen rational in der Länge und in der Potenz sei, und dies sind diejenigen [Größen], in denen nichts Irrationales erscheint[32]), und was von ihnen rational bloß in der Potenz ist, dies ist die erste irrationale Linie, die Mediale genannt wird[33]), diese Linie vermehrt[34]) nämlich die Linien, die gleichartig zu den rationalen Linien sind; denn es hat unter den Mediallinien solche, welche kommensurabel[35]) sind in der Länge und in der Potenz, ähnlich wie es bei den rationalen [Linien] gefunden wird, und solche, welche nur in der Potenz kommensurabel[35]) sind; und was die Eigenschaft ihrer Gleichartigkeit mit jenen (den rationalen

28) D. h. „die Gedankenfolge in den Sätzen".

29) Dieses „noch so klein angenommen" wird ausgedrückt durch: „und seine Abnahme bleibt durchaus nicht stehen". Er meint natürlich damit den 1. Satz des X. Buches.

30) Satz 10 (bei Heiberg, nach dem ich in Zukunft immer zitiere).

31) Sätze 11—18.

32) Eigentlich „zur Vorstellung oder Darstellung kommt".

33) Wörtlich: „dies ist das, was die irrationale Linie erzeugt, die Mediale genannt wird."

34) So habe ich nach dem Text übersetzt, wo akthara steht, vielleicht ist aber zu lesen akbar, dann könnte man übersetzen: „diese Linie ist die wichtigste der Linien, die . . . sind".

35) So übersetze ich, der Text hat muwassiṭ = medial, was hier keinen Sinn gibt.



Größen) ausmacht, ist das, daß die in der Potenz rationalen [Linien] eine mediale Fläche (Rechteck) bilden, und die in der Potenz medialen bald eine rationale, und bald eine mediale Fläche[36]). Hieraus (d. h. aus diesen einfachen rationalen und irrationalen Linien) entstehen andere Irrationallinien verschiedener Art, solche, welche durch Zusammensetzung (Addition), und solche, welche durch Teilung (Subtraktion) entstehen. Ihre Verschiedenheit wird nachgewiesen von verschiedenen Gesichtspunkten aus, in erster Linie durch die Flächen, die sie potenzieren[37]), und durch Anlegung dieser Flächen an die [gegebene] rationale Linie[38]). Und endlich, nachdem er uns belehrt hat über ihre Verwandschaften und ihre Verschiedenheiten, kommt er zur Erklärung der Unbegrenztheit der Irrationallinien[39]) und ihrer Unterscheidung, und zwar indem gezeigt wird, daß aus der einen Irrationallinie, der Medialen, irrationale Linien verschiedener Art in unendlicher Zahl entstehen können. An dieser Stelle schließt das Buch, und die Betrachtung des Irrationalen wird verlassen, weil dies ins Endlose führen würde; das zwingt uns nun auch, daß wir von der Schilderung der Zwecke und des Nutzens dieses Buches und seiner Einteilung [zu etwas anderem] übergehen.

(S. 6) Es ist nun nötig, daß wir genau untersuchen, wie weit man in der Unterscheidung dieser Größen ging; man sagte, daß die einen kommensurabel, die andern inkommensurabel seien, da bei den [geometrischen] Größen nie ein kleinstes Maß gefunden werden könne; aber die Sache ist gemäß dem, was im 1. Satze [des X. Buches] bewiesen wurde, die, daß zu jeder noch so kleinen gegebenen Größe immer noch eine Größe gefunden werden könne, die kleiner ist als jene, mit einem Worte: man sagte, wie es möglich sei, verschiedene Arten irrationaler Größen zu finden, da doch alle endlichen (begrenzten) Größen zueinander ein [bestimmtes] Verhältnis haben, und zwar deshalb, weil es stets möglich ist, wenn [die eine] immer verdoppelt wird, daß sie die andere ohne allen Zweifel einmal übertreffen muß, und das will es bedeuten, wenn gesagt wird, daß eine Größe zu einer andern ein [bestimmtes] Verhältnis habe, wie wir im V. Buche [des Euklides] gelernt haben. Wir sagen also, daß, wenn Jemand diesen Weg eingeschlagen hat (oder diesen Regeln, Definitionen gefolgt ist), es ihm doch nicht gelingen (zukommen) werde, ein irrationales [gemeinschaftliches] Maß zu finden[40]); aber es ist nötig, daß wir aus dieser Sache[41]) . . . lernen, daß das [gemeinschaftliche] Maß, was die Zahlen anbetrifft, in Wirklichkeit (in der Natur) existiert, was aber die [geometrischen] Größen anbetrifft, so existiert

36) Über diese Dinge handeln die Sätze 19 bis 35. Vergl. den Anhang Nr. 1.

37) D. h. durch die Quadrate dieser Linien.

38) Über die Eigenschaften dieser durch Zusammensetzung und Trennung entstehenden Linien (Binomien und Apotomeen) handeln die Sätze 36—111.

39) Satz 115.

40) Pappus will wohl hiemit sagen, daß mit den Sätzen des V. Buches allein es nicht möglich sei zu beweisen, daß z. B. $\sqrt{8}$ und $\sqrt{18}$ ein gemeinschaftliches Maß, nämlich $\sqrt{2}$, besitzen.

41) Hier folgen die drei mir an dieser Stelle unverständlichen Worte mâ hâdhâ namtali'uhu, vielleicht sollte es statt namtali'uhu heißen: na'talimuhu, aber auch dieser Lesart vermag ich keinen Sinn zu geben.

es in Wirklichkeit nicht wegen der Teilung, von der wir vorher gesprochen und mehrmals gesagt haben, daß sie bis ins Unendliche gehe; aber sie wird doch bei ihnen gefunden, nämlich in der Theorie (Hypothese)[42]) und als Ergebnis der Vorstellung (Idee)[43]); wir nehmen nämlich ein bestimmtes, abgegrenztes Maß an und nennen es Elle, Spanne oder irgend etwas ähnliches; dann beobachten wir, ob durch dieses Maß [oder seine Teile] irgend eine der Größen gemessen werden könne, in diesem Falle nennen wir diese Größe rational, und was nicht durch es [oder seine Teile] gemessen werden kann, das rechnen wir zu den irrationalen Größen; es ist also das auf diese Weise gefundene Rationale nicht etwas, was wir aus der Natur genommen haben[44]), sondern es entstand aus der Einbildung des Gedankens, der sich das angenommene Maß ausgesucht hatte; deshalb ist es selbstverständlich, daß nicht alle [geometrischen] Größen rational sind, d. h. verglichen mit einunddemselben gemeinsamen Maß, denn das angenommene Maß ist nicht ein Maß für alle und ist nicht ein Produkt der Natur, sondern ein Produkt des Gedankens; aber es sind auch nicht alle [geometrischen] Größen irrational, denn wir beziehen das Messen irgendwelcher Maße[45]) auf eine uns bekannte geordnete Regel (Definition, Gesetz)[46]).

(S. 7) Es ist auch notwendig zu bemerken, daß die Proportionalität in absolutem Sinne bei den endlichen und gleichartigen Größen nach einer [bestimmten] Art aufgefaßt wird, bei den kommensurabeln Größen nach einer andern Art, bei den rationalen Größen[47]), wie wir sie nennen, wieder nach einer andern Art, und zwar deshalb, weil das Verhältnis unter ihnen in einigen Fällen nur in dem Sinne bekannt ist, daß es nämlich die Beziehung endlicher Größen zueinander ausdrückt in Hinsicht auf das Große und Kleine[48]), in andern Fällen in dem Sinne, daß es gefunden wird (existiert) in einer Beziehung, wie sie bei den Zahlen auftritt; deshalb ist es klar, daß alle kommensurabeln Größen zueinander ein Verhältnis haben, wie das Verhältnis einer Zahl zu einer Zahl. Wie in andern Fällen, wenn wir das Verhältnis in Bezug auf das angenommene bestimmte Maß festgesetzt haben, werden wir auf den Unterschied geführt, der zwischen dem Rationalen und dem Irrationalen besteht, und darauf, daß die Kommensurabilität auch im Irrationalen (unter irrationalen Größen) besteht. Das wissen wir schon aus Euklides selbst, wenn er sagt, daß gewisse der Mediallinien kommensurabel in der Länge seien und gewisse in der Potenz nur; es ist also klar, daß die Kommensurabilität unter dem Irrationalen, d. h. das Verhältnis der einen [Größen] zu den andern, wie dasjenige zweier Zahlen zueinander [bestehen kann], auch wenn nicht ein Verhältnis [der irrationalen Größen] zu

42) Arab. bi'l-waḍ'.

43) Arab. bitaḥṣîl al-wahm.

44) D. h. was auf natürliche Weise entstanden ist.

45) Soll wahrscheinlich heißen „Größen".

46) Was hiemit gemeint ist, ist nicht recht verständlich.

47) Hier müssen Fehler im Texte vorhanden sein: kommensurable und rationale Größen sind keine Gegensätze.

48) Sollte vielleicht heißen: auf das größere oder kleinere.



jenem bestimmten, angenommenen Maß besteht[49]); denn es ist nicht ausgeschlossen, daß unter den Medialen Beziehungen (Verhältnisse) bestehen, wie das Verdoppeln und Verdreifachen, die Hälfte und der dritte Teil, ohne daß wir genau wissen, wie groß jedes ist[50]). Dieses zeigt sich durchaus nicht bei den rationalen Größen[51]), denn wir wissen ohne Zweifel, daß das Kleine (der gemeinsame Teiler?) bei jenen bekannt ist, sei es nun eine Elle oder zwei oder etwas durch eine andere Definition erhaltenes (festgesetztes). Wenn nun die Sache sich so verhält, so findet bei allen endlichen Größen in ihrem gegenseitigen Verhältnis ein gewisser Zustand statt, ein anderer Zustand bei den kommensurabeln, ein anderer bei den rationalen, verschieden von dem in den vorigen beiden Fällen, und dies deshalb, weil das Verhältnis des Rationalen auch das Verhältnis des Kommensurabeln ist, nämlich das Verhältnis des Endlichen (Begrenzten), aber das Verhältnis des Endlichen ist zweifellos (S. 8) nicht [immer?] das Verhältnis des Kommensurabeln, denn jenes Verhältnis ist nicht notwendig wie das Verhältnis einer Zahl zu einer Zahl, und das Verhältnis des Kommensurabeln ist nicht notwendig wie das Verhältnis des Rationalen, und zwar deshalb, weil jedes Rationale kommensurabel[52]), aber nicht jedes Kommensurable rational ist[53]).

Aus diesem Grunde ist es durchaus notwendig, wenn zwei kommensurable Linien gegeben sind, zu bemerken, ob dieselben entweder beide rational. oder beide irrational seien, aber nicht, daß die eine rational und die andere irrational sei, denn das Rationale ist in keinem Falle kommensurabel dem Irrationalen. Was aber den Fall betrifft, wo zwei inkommensurable Linien gegeben sind, so kommt notwendig einer der beiden Fälle in Frage, ob die eine rational und die andere irrational, oder ob beide irrational seien, weil bei den rationalen Linien allein nur die Kommensurabilität besteht[54]); was das Irrationale anbetrifft, so

49) Diese schwierige Stelle ist frei übersetzt, aber ich bin überzeugt, daß der Sinn der richtige ist; es handelt sich hier darum, daß, wie oben schon bemerkt wurde, $\sqrt{18}$ und $\sqrt{8}$ z. B. kommensurabel sind, obschon jede zur Einheit inkommensurabel ist. Dies sind allerdings im Sinne Euklids keine irrationalen Größen, passender wäre also hier das Beispiel der beiden Medialen $\sqrt[4]{5}$ und $\sqrt[4]{80}$, die sich wie 1 : 2 verhalten.

50) Wir können nicht genau sagen, wie groß $\sqrt[4]{80}$ und $\sqrt[4]{5}$ sind, aber wir wissen, daß die erste genau zweimal größer ist als die zweite.

51) Diese Stelle könnte auf eine Einschiebung schließen lassen, denn nach Euklids Auffassung sind $\sqrt{18}$ und $\sqrt{8}$ rationale Größen, und doch gilt von ihnen ganz das gleiche wie bei $\sqrt[4]{80}$ und $\sqrt[4]{5}$.

52) Dies aber nur, wenn man die Potenz dazu nimmt, denn in der Länge ist das Rationale nicht immer kommensurabel, z. B. 3 und $\sqrt{5}$ sind rational, aber nur in Potenz kommensurabel; diese Stelle macht daher wiederum den Eindruck einer Einschiebung.

53) Siehe Anhang Nr. 2.

54) Hier gilt, was in Note 1 gesagt wurde, es können auch beide rational sein; man könnte, wenn dies keine Einschiebungen sind, beinahe zu der Ansicht kommen, Pappus hätte schon, abweichend von Euklides, $\sqrt{2}$ z. B. als eine irrationale Größe aufgefaßt; es zeigt sich dies auch später noch einmal.

existiert bei demselben sowohl die Kommensurabilität als auch die Inkommensurabilität, denn die Verschiedenheit in der Art des Irrationalen bedingt durchaus die Inkommensurabilität, und zwar deshalb, weil, wenn sie [stets] kommensurabel wären, sie notwendig übereinstimmend in der Art sein müßten, denn die mit der Medialen kommensurable Linie ist medial und die mit der Apotome kommensurable ist eine Apotome. So verhält es sich auch mit den anderen Linien, wie der Geometer (Euklides) sagt.

Aber[55]) nicht jedes Verhältnis wird in der Zahl gefunden[56]), und nicht alles, was ein Verhältnis zueinander hat, verhält sich wie eine Zahl zu einer Zahl; denn wenn dies wäre, so wären alle Größen zueinander kommensurabel, und dann wäre dementsprechend, da jede Zahl gleichartig mit dem Endlichen (Begrenzten) ist, die Zahl nicht eine Vielheit, wie sie vereinbart (definiert) worden ist, sondern sie wäre die stetige Vielheit, und es wäre das Endliche (Begrenzte) höher von Natur (anderer Natur) als die Zahl. Das Verhältnis der Endlichkeit (der endlichen Größen?) wird also bei den [geometrischen] Größen gefunden auf eine [bestimmte] Art und das Verhältnis der Zahlen (wörtlich: das von den Zahlen kommende), wenn es endlich ist, auf eine andere Art; das Verhältnis des Endlichen haben wir [aber?] getrennt (unterschieden) von den Dingen, die keine Endlichkeit besitzen, und das Verhältnis des Kommensurabeln haben wir unterschieden von dem Inkommensurabeln, und dies deshalb, weil jenes Verhältnis ein kleinstes (einen kleinsten Teil) bewirkt, und deshalb alles, was aus ihm hervorgeht, kommensurabel macht, dieses aber bald ein größtes (einen größten Teil), (S. 9) bald ein kleinstes bewirkt, und dies deshalb, weil jedes Endliche (Begrenzte) bloß endlich ist in Rücksicht auf die Endlichkeit, die die erste (der Anfang) des Endlichen überhaupt (?) ist; wir geben also (Text: „auch") den einen Größen die Endlichkeit (Begrenztheit) auf diese Weise, den andern auf eine andere Weise: dies mußten wir notwendig zur Begründung dieser Dinge anführen.

Da nun das Irrationale auf drei Arten entsteht, erstens durch Proportionalität, zweitens durch Addition und drittens durch Subtraktion, so glauben wir, daß diese Sache in erster Linie unsere Betrachtung (Text: unser Erstaunen) verdiene, und dies deshalb, weil die Kraft dieser Dreiteilung das Ganze regiert, indem sie das Wesen des Irrationalen unterscheidet und abgrenzt, abgesehen von anderem, und bis zum Ende durchdringt und in allem Wurzeln treibt. In zweiter Linie sehen wir, wie jeder einzelne dieser drei Wege je einem der drei Mittel entspricht, der erste dem geometrischen, der zweite dem arithmetischen und der dritte dem harmonischen. Etwas Ähnliches ist es mit dem Wesen der Seele[57]), indem dieses nämlich, wenn es übergeht in die Natur der Größen, sich

55) Der hier folgende Abschnitt bis S. 9, Z. 3 ist einer der schwierigsten des Buches, er greift stark in das philosophische Gebiet hinein, und ich bin nicht sicher, ob ich alles richtig aufgefaßt habe.

56) So wörtlich, es soll wohl heißen: „kann durch Zahlen ausgedrückt werden".

57) Hier erscheint wieder der Neu-Platoniker oder Neu-Pythagoräer, sein Vergleich ist mir nicht verständlich geworden, wahrscheinlich entspringt das Vorhergehende auch schon diesen Anschauungen.



gemäß dem, was ihm notwendig zukommt, dem was in den Größen von dem Begriffe der Mittel[58]) besteht, nähert (verwandt wird), und daß es alles, was in den Größen unbegrenzt und nicht erreichbar ist, ausscheidet (auswählt) und die endlose Zahl der irrationalen Größen nach allen Seiten darstellt und ordnet[59]) . . .

(S. 10, Z. 6) Denn diejenigen, welche der Wissenschaft Platos nachdenkend folgten, behaupten (halten dafür), daß die Definition, die er in seinem Buche Theätetus über die in Länge und Potenz kommensurabeln Linien und über diejenigen, die bloß in Potenz kommensurabel sind, erwähnt, keineswegs übereinstimmend sei mit dem, wie es Euklides definiert. Wir wollen darüber einiges mitteilen: Theätetus, nachdem sich Theodorus [früher] mit ihm unterhalten hatte über die Beweise über die kommensurabeln und die in der Länge inkommensurabeln Potenzen in ihrem Verhältnis (Vergleich) zu der Potenz, deren Größe ein Fuß ist, nahm seine Zuflucht zu einer gemeinsamen Definition für diese [Potenzen], gleichsam als einer, der aufmerksam gemacht worden war auf das sichere Wissen (die Wahrheit)[60]): Er teilt alle Zahlen in zwei Klassen, in solche, welche aus gleichen Seiten (Faktoren), und in solche, welche stets aus einer längeren und einer kürzeren Seite zusammengesetzt sind, und verglich die ersten mit einem Quadrat und die letzteren mit einem Rechteck und urteilt über die Potenzen (Flächen), welche aus gleichen Seiten gebildet sind, daß sie kommensurabel in Potenz und Länge seien, und über diejenigen, die aus ungleichen Seiten gebildet sind daß sie inkommensurabel in der Länge seien, mit der Beschränkung, daß gewisse von ihnen zu gewissen kommensurabel sein können. Was aber Euklides anbetrifft, so beweist er, nachdem er die Abhandlung (Theätetus) studiert und schließlich gefunden hatte, daß die in Länge und Potenz kommensurabeln Linien diejenigen seien, deren Potenzen sich wie zwei Quadratzahlen verhalten, daß alle Linien, die sich so verhalten, stets kommensurabel in der Länge seien. Uns ist der Unterschied zwischen der Ausdrucksweise Euklids und derjenigen des Theätetus nicht entgangen, denn die Bedeutung (Sinn) der Darstellung der (S. 11) Potenzen durch Quadratzahlen und diejenige, daß zwischen solchen Potenzen das Verhältnis bestehe wie zwischen zwei Quadratzahlen, ist nicht dieselbe; denn wenn z. B. die eine Potenz 18 Fuß[61]) und die andere 8 Fuß[61]) wäre, so ist von vornherein klar, daß das Verhältnis der einen zur andern gleich dem zweier Quadratzahlen ist, und zwar derjenigen, von denen diese beiden Zahlen das doppelte sind; nun sind dies (18 und 8) aber zwei rechteckige Zahlen, und ihre Seiten sind nach Euklids Definition kommensurabel, aber nach der Definition des Theätetus gehören sie nicht zu dieser Art, denn sie sind keine Quadratzahlen, sondern rechteckige

58) Hier steht das Wort tawassuṭat, das hier kaum anders zu übersetzen ist.

59) Von hier an bis S. 10, Z. 5 ist der Text sehr unklar und wahrscheinlich stark verdorben, so daß ich ihn nicht in ein verständliches Deutsch zu übertragen vermag; der Verfasser vergleicht, wie ich es auffasse, die verschiedenen Zustände der Seele, die Vereinigung, die Trennung und einen Mittelzustand, mit den drei mathematischen Mitteln, dem arithmetischen, harmonischen und geometrischen.

60) Hier folgt noch bil-ṭab', das ich nicht passend zu übersetzen weiß, vielleicht „auf natürlichem Wege".

61) Natürlich sollte es hier „Quadratfuß" heißen.



Zahlen. Dies gehört zu den Dingen, die von den Menschen verstanden werden sollten (oder könnten)[62].

Wir müssen nun bemerken, daß wirklich die Ausdrucksweise des Theätetus nicht paßt für alle in der Länge kommensurabeln und für die inkommensurabeln Potenzen, aber wohl für Potenzen, deren Verhältnis zu irgend einer Potenz rational ist, ich meine zu der Potenz, deren Größe ein Fuß[63]) ist, und dies deshalb, weil die Untersuchung des Theodorus über die Potenzen, deren Größe 3 Fuß[63]) und 5 Fuß[63]) sind, bei dieser Stelle (d. h. bei der Potenz von einem Fuß) ihren Anfang nimmt (d. h. von der Potenz 1 ausgeht). Er sagt nämlich, daß sie beide [in der Länge] inkommensurabel seien zu der Potenz, deren Größe ein Fuß ist; er macht dies damit klar, daß er sagt: die Linie, welche die (eine) Quadratzahl potenziert, ist, wie wir schon definiert haben, eine Länge[64]), aber diejenige, welche die rechteckige Zahl potenziert, haben wir als Potenz[64]) definiert, da sie in der Länge mit jener nicht kommensurabel ist, nämlich mit der Potenz, deren Größe ein Fuß ist, und auch mit Potenzen, welche zu dieser kommensurabel sind in der Länge. Was aber Euklides anbetrifft, so gilt seine Ausdrucksweise für alle Potenzen, er zieht zur Vergleichung nicht eine bestimmte rationale Potenz und eine bestimmte Linie herbei. Es ist auch nicht möglich, daß wir auf irgend eine Art zu beweisen imstande wären (wahrscheinlich nach der Definition des Theätetus), daß die Potenzen, die wir angeführt haben (nämlich 18 und 8), unter sich kommensurabel in der Länge sind, obgleich sie nicht kommensurabel [in der Länge] zu der Potenz sind, deren Größe ein Fuß ist[65]). Deshalb wird auch die Untersuchung über dieses schwer verständlich sein für diejenigen, welche versuchen, (S. 12) für die Linien, die diese Potenzen (nämlich 18 und 8) potenzieren, ein bestimmtes [gemeinsames] Maß festzustellen, obgleich es denjenigen, die den Beweis des Euklides genau studieren, möglich sein wird, sie ohne allen Zweifel kommensurabel zu finden, denn es wurde schon gezeigt, daß sie (die Potenzen 18 und 8) unter sich ein Verhältnis haben, wie eine Quadratzahl[66]) zu

62) Es ist also ganz richtig, daß die Definition des Theätetus keine allgemeine gültige war, sie bedurfte einer Beschränkung, d. h. sie hatte Ausnahmefälle, die Definition Euklids aber war eine für alle Fälle gültige.

63) Auch hier sollte natürlich „Quadratfuß“ stehen.

64) „Länge“ bedeutet hier rational, „Potenz“ irrational, nach unsern Begriffen. Vergl. über diese Ausdrucksweise H. Vogt in Biblioth. mathem. $\mathbf{10}_3$, S. 99—100. 1909/10, und diese Abhandlung S. 27.

65) Hier folgt noch der Satz: „und daß auch die Zahl, die das gemeinsame Maß der Linien ist, aus denen jene Potenzen entstanden sind (also der Linien $\sqrt{18}$ und $\sqrt{8}$) nicht rational ist.“ Dieser Satz ist sehr verdächtig, denn kein griechischer, auf dem Boden Euklids stehender Mathematiker spricht von einer rationalen Zahl, das Wort „Zahl“ bedeutet immer „ganze Zahl“. Man kann aber auch das Wort „Zahl“ nicht durch „Linie“ ersetzen, denn das gemeinschaftliche Maß von $\sqrt{18}$ und $\sqrt{8}$, d. h. $\sqrt{2}$, ist gerade nach Euklids Begriffen rational. Es wäre freilich, wie wir (S. 19, Anm. 54) schon bemerkt haben, möglich, daß schon Pappus die Irrationalität anders aufgefaßt haben könnte als Euklides, wie wir dies ja auch schon bei Diophantus finden.

66) Der Text hat nur „Zahl“.

einer Quadratzahl[66]). Und damit schließen wir das, was wir über die Zweifel Platos zu sagen hatten[67]).

Zu den Dingen, die der Philosoph (wohl Plato) erklärt, gehört auch, daß es hier (?) inkommesurable Größen gibt, und daß es nicht nötig ist anzunehmen, daß die Kommensurabilität bei allen Größen existiere, wie es bei den Zahlen der Fall ist, und daß derjenige, der dieses nicht untersucht (studiert) hat, mit einer starken Unwissenheit behaftet ist in den Dingen, von denen der athenische Gastfreund im 7. Buche der Gesetze sagt: „und nach diesen Dingen wird wirklich bei allen Menschen eine schmähliche Unwissenheit gefunden, die ihnen von Natur anhaftet[68]), und über die gelacht wird, das ist in der Ausmessung von allen Dingen, denen Länge, Breite und Tiefe (Höhe) zukommt[69]), und es ist klar, daß sie nur von dieser Unwissenheit befreit werden durch die Belehrung (den Unterricht)". Er sagt weiter: „Ich halte dafür, daß diese Sache eher tierisch als menschlich sei, und ich schäme mich nicht nur über mich, sondern über alle Griechen; wer hatte von den frühern Menschen die Meinung, die zur jetzigen Zeit alle Menschen haben, daß die Kommensurabilität notwendig allen Größen zukomme?[70]) Alle sagen, daß sie begreifen, daß in allen einzelnen Dingen es auf irgend eine Art möglich sei, daß einige von ihnen andere messen; das richtige jedoch ist, daß gewisse gemessen werden durch gemeinsame Maße, andere aber durchaus nicht." Es ist nun aus den Worten des Buches Theätetus genügend klar geworden, wie notwendig es ist, daß die in Länge und Potenz kommensurabeln Linien in Bezug auf die rationale gegebene Linie, ich meine diejenige, deren Länge ein Fuß ist, unterschieden werden von den bloß in Potenz kommensurabeln Linien, wie wir dies schon weiter oben behandelt haben. Nach dem, was in dem Buche . . .[71]) gesagt ist, ist es nun leicht für uns, wie auch schon von uns geschildert worden ist, die Verschiedenheit zu erkennen (zu verstehen), welche in der Zusammensetzung der rationalen Linien besteht, indem [dort] gesagt wird: (S. 13) „Wenn beide Linien rational sind, so ist es möglich, daß das Ganze das eine mal rational, das andere mal irrational sei"; denn die Linie, die zusammengesetzt ist aus zwei in Länge und Potenz rationalen Linien, ist ohne Zweifel rational, und die Linie, die zusammengesetzt ist aus zwei bloß in Potenz rationalen Linien, ist irrational.

---

67) Bis hieher geht das Bruchstück einer lateinischen Übersetzung (wahrscheinlich von Gerhard von Cremona), das sich in dem Pariser Ms. 7377 A, fol. 68—70b befindet (vergl. Steinschneider, in Z. D. M. G. Bd. 25, Note 2).

68) So der griechische Text (vergl. Biblioth. mathem. 10_3, 136. 1909/10), der arab. Text hat bloß nach „schmähliche" bi'l-ṭab' = von Natur, angeboren.

69) Auch hier ist die Übersetzung unsicher, der Text ist verdorben, ich bin dem Sinne des griech. Textes gefolgt (Bibl. mathem. l. c.).

70) Aus diesen Worten muß man schließen, daß Plato den früheren Zeiten (vielleicht der älteren pythagoräischen Schule) eine bessere Kenntnis über kommensurable und inkommensurable Größen zuschrieb als seiner eigenen Zeit, was mir nicht recht verständlich wäre.

71) Der Name ist nicht lesbar, vielleicht ist das gleiche Buch gemeint wie vorher, vielleicht auch das X. Buch des Euklides.



[72]) Wenn es auch nötig (passend, geziemend) wäre, daß wir das nicht in Abrede stellen, was er (Plato) in dem nach Parmenides benannten Buche erwähnt, so bringen wir doch den ersten Fehler (oder die erste Ursache) über die Einteilung der kommensurabeln und inkommensurabeln Linien zur Kenntnis, und der ist, daß er das Gleiche, das Größere und das Kleinere zusammen darstellt nach der ersten (?) Art und das Kommensurable und Inkommensurable nach derselben Art[73]) auffaßt, obgleich beide in der Vorstellung (Idee) mit der Größe zusammen bestehen; es ist klar, daß diese (?) in sich enthalten das Wesen der Dinge, in deren Natur es liegt, daß sie die Vereinigung und die Trennung bestimmen (regieren), mit denen Gott das Weltall ausgerüstet (stark, mächtig gemacht) hat, und daß, weil einerseits der göttliche Wille der Existenz der Dinge vorangeht, sie also alle gemäß dieser Ursache kommensurabel sein müssen, denn Gott mißt die Dinge alle besser als die Einheit die Zahl mißt, und weil andrerseits die materielle Verschiedenheit es notwendig macht, daß in diesen Dingen die Inkommensurabilität gefunden werden muß; diesem analog ist auch, daß das Begrenzte (wörtlich die Grenze, Definition) geeigneter dafür ist, daß es im Kommensurabeln vorherrschend sei, weil es aus der göttlichen Kraft entstanden ist, und das Materielle sich mehr hinneige zu den Größen, die die inkommensurabeln genannt werden; denn wenn du wissen willst, woher den Größen die Inkommensurabilität zugekommen ist, so findest du dies nur in einem Ding, das du dir bis ins Unendliche teilbar vorstellen kannst; die Teile jedoch sind ohne Zweifel materiell (gehören zum Materiellen, zur Materie), wie das Ganze zur Form gehört[74]); und was nur potential (in der Potenz) ist, wird in allen materiellen Dingen gefunden, wie das, was aktual ist, nur in den letzten Prinzipien (Atomen ?); also wird das Inkommensurable bei den geometrischen Größen in Bezug auf das Materielle (oder auch vor dem Materiellen) nur deshalb gefunden, weil das Materielle, wie (S. 14) Aristoteles sagt, in zwei Gattungen zerfällt: die eine kann durch den Verstand erfaßt werden, die andere nur durch das Gefühl wahrgenommen werden, und zwar deshalb, weil die Vorstellung der Maßigkeit oder der Entfernung (Ausdehnung) nur bei den geometrischen Formen vorkommt mit Rücksicht auf das durch den Verstand erfaßte Materielle; denn der Ort, wo die Form und die Begrenzung allein existiert, ist der, wo alle Dinge ohne Ausdehnung und ohne Teile sind. Und diese Form ist in Wahrheit natürlich

72) Von hier an bis S. 14, Z. 10 folgt wieder eine sehr schwere und wohl vielfach verdorbene Stelle des Kommentars, sie ist um so schwerer zu verstehen, als sie sich auch an den schwersten Dialog Platos, an Parmenides anschließt. Will man gewisse Anklänge des Kommentars an diesen Dialog herausfinden, so vergl. man Parmenides in der Übersetzung von Schleiermacher (I. Teil, 2. Bd. Berlin 1818) S. 147, 150, 168, 173—174, u. a. Auf eine verständliche, einwandfreie Wiedergabe dieser Stelle des Kommentars mußte ich verzichten; der Leser wird mich entschuldigen, besonders wenn er den Dialog Parmenides einmal etwas näher angesehen haben wird.

73) Der Text hat hier mauḍi' = Stelle, Ort, was ich als fehlerhaft betrachte, es sollte wohl wada' heißen.

74) D. h. wohl: die Teile haben keine Form, nur das Ganze.



(wesentlich)[75]), nicht körperlich, und die Linie, die Fläche und der Körper und alles, was im Bereich der Einbildung steht, die in uns ist, hat teil auf irgend eine Weise an der materiellen Eigenschaft (Eigentümlichkeit); deswegen ist die Natur der Zahlen einfach und frei von dieser Imkommensurabilität, ohne daß immaterielle Begrenzungen[76]) vorausgesetzt werden müssen. Und was die Grenzen (Begrenzungen) anbetrifft, die von dort (?) zur Vorstellung gelangen, und das Werden (Erscheinen) zu diesem Akt der Vorstellung, so sind sie reich an (voll von) dem Nicht-Rationalen und haben teil am Inkommensurabeln, und ihre Natur ist kurz (ausgedrückt) die der akzidenziellen Eigenschaften[77]) der Materie.

(S. 14, Z. 11) Es ist nötig, daß wir zur Sache zurückkehren, die wir eigentlich bezwecken, und wir wollen nun untersuchen, ob es möglich sei, daß irgend welche rationale Linien inkommensurabel zu der von Anfang an gegebenen rationalen Linie seien, oder kurz[78]), ob es überhaupt möglich sei, daß ein Maß (sollte wohl heißen „eine Größe") rational und [zugleich] irrational sei. Wir sagen, daß die geometrischen Größen nur in der Annahme (Theorie, Hypothese), nicht von Natur (in der Wirklichkeit) vorhanden sind, wie wir schon öfters bemerkt haben, und deshalb ist es durchaus notwendig, daß das Rationale und das Irrationale ausgedrückt (wörtlich „übertragen") werde gemäß der Annahme der gegebenen Zahl[79]), und es ist also nicht so, daß das Inkommensurable unmöglich auf irgend eine Art kommensurabel sein könnte, wie z. B. das Rationale niemals irrational sein kann; aber da es notwendig ist, daß die Eigenschaften des Rationalen und des Irrationalen bestimmt festgesetzt seien, so nehmen wir ein [bestimmtes] Maß an und zeigen durch Messung mit demselben (durch Vergleichung mit ihm) die besonderen Eigenschaften der rationalen und der irrationalen Größen, denn wenn wir nicht diese Unterscheidung an ihnen durch Messung mit einem gemeinsamen (S. 15) Maß konstatieren würden, so wäre es möglich, daß wir eine Größe rational nennen, die durch das gegebene gemeinsame Maß nicht gemessen wird[80]), oder es könnte von einer Linie, von der wir genau wissen, daß sie medial ist, ein anderer urteilen, daß sie nicht medial sei, ja daß sie sogar rational sei[81]). Das wäre also kein wissenschaftlicher Weg, mithin[82]) ist es notwendig, daß eine Linie rational sei (wohl „daß eine rationale Linie gegeben sein muß"), wie Euklides sagt.

75) ṭabiʿa.

76) Ich setze hier an Stelle von ḥayât = Leben, Lebendiges, was gar keinen Sinn gäbe, ḥudûd = Begrenzungen, obgleich auch dieses nicht recht passen will.

77) So übersetze ich das arab. ʿawâriḍ.

78) Dieses „kurz" kommt öfters vor in den Collectiones des Pappus in der Form κατὰ σύλληψιν.

79) „Zahl" ist wohl fehlerhaft, es sollte heißen „Größe" oder „Linie".

80) Hier ist der Satz eingeschaltet: „da die Definitionen dieser Theorie von uns scharf unterschieden, nicht schwankend, festgehalten (bewahrt) werden".

81) Der Text ist hier jedenfalls stark verdorben, ich mußte deshalb etwas frei übersetzen, glaube aber den richtigen Sinn getroffen zu haben. Es folgen hier, wahrscheinlich eingeschoben, noch die Worte: „wann sie etwas anderes ist als eine (ganze) Zahl."

82) Hier steht im Text „aber" oder „jedoch", was mir keinen rechten Sinn zu geben scheint.

Nehmen wir nun die gegebene Linie rational an, weil dies eben [nach Euklides] notwendig ist, und nennen wir jede kommensurable zu ihr, in der Länge sowohl als in der Potenz, rational, und umgekehrt auch die eine von diesen zur andern [rational], und setzen wir fest, daß die kommensurable zur gegebenen rationalen Linie rational, und das rationale kommensurabel zur gegebenen rationalen Linie sei, und dies deshalb, weil das Inkommensurable zu dieser [rationalen] Linie von Euklides als irrational definiert wird, so ist es also aus diesem Grunde (wörtlich „von hier aus") nicht notwendig, daß alle in der Länge kommensurabeln Linien, wenn sie auch rational genannt werden, auf jene angenommene rationale Linie bezogen werden [müssen], und ebenso ist es nicht notwendig, daß sie kommensurabel genannt werden, obgleich diese Linie sie mißt; aber wann immer sie ein Verhältnis haben zur gegebenen [rationalen] Linie, ob in der Länge oder in der Potenz, werden sie ohne Zweifel rational genannt, und dies, weil jede einzelne der zu der gegebenen Linie in der Länge oder Potenz kommensurabeln Linien rational ist[83]). Was die Kommensurabilität dieser Linien in Länge oder bloß in Potenz anbetrifft, so ist diese Eigenschaft ihnen von außen zugekommen und besteht nicht gemäß ihrem Verhältnis zu der gegebenen [rationalen] Linie, denn die medialen Linien z. B. können auch bald kommensurabel in der Länge, bald nur in der Potenz sein; derjenige trifft also nicht das richtige, der sagt, daß alle rationalen, in der Länge kommensurabeln Linien nur rational seien in Bezug auf die Länge (?), und deshalb werden also keineswegs alle rationalen Linien durch die gegebene Linie gemessen. Es werden also die zu der gegebenen rationalen Linie in Potenz kommensurabeln Linien durchaus rational genannt, und zwar aus dem Grunde, weil, wenn wir zwei rechteckige Flächen annehmen würden, die eine von 50 Fuß (Quadratfuß) Fläche, die andere von 18 Fuß, die beiden Flächen gewiß kommensurabel wären zu dem Quadrat, das aus der gegebenen rationalen Linie entsteht, und dessen Größe ein Fuß (Quadratfuß) sei, und die beiden Linien, (S. 16), die diese Flächen potenzieren, wären zueinander kommensurabel, beide aber inkommensurabel zu der angenommenen rationalen Linie, und doch nennen wir diese zwei Linien rational und kommensurabel in der Länge, und zwar rational, weil ihre Quadrate kommensurabel zu dem Quadrat der gegebenen Linie sind, und kommensurabel in der Länge, weil sie, obgleich das gemeinschaftliche Maß beider nicht die gegebene Linie ist, doch beide durch ein anderes Maß gemessen werden. Es ist dies also kein Ding von den [gewöhnlichen] Dingen[84]): es wird etwas rational angenommen, ist aber inkommensurabel zu der gegebenen rationalen Linie[85]). Was also die Größen anbetrifft, die kommensurabel sind in der Länge oder nur in der Potenz,

83) Diese Darstellung scheint etwas verworren zu sein, es ist nicht recht klar, was der Kommentator damit meint.

84) Das soll wohl heißen „es ist dies ein besonderer, eigentümlicher Fall".

85) Es scheint mir, daß Pappus mit den vorangehenden Worten erklären will, weshalb Euklides Größen wie $\sqrt{a}$ rational nenne; dies macht es wahrscheinlich, daß er selbst schon auf dem Boden des Diophantus stand, der eine solche Größe als irrational definierte.



so haben wir sie also so (?) angenommen, das gemeinsame Maß möge dann sein, welches es wolle.

Da nun bewiesen ist, daß die Fläche, die von zwei rationalen in der Länge kommensurabeln Linien gebildet wird, rational ist, so können nun diese beiden Linien entweder rational sein mit Rücksicht ihrer Gleichartigkeit (Kommensurabilität) mit der gegebenen rationalen Linie, wie auch ihr Verhältnis zu ihr sei, in der Länge oder nur in der Potenz, oder sie können [zueinander] kommensurabel in der Länge sein, indem beide ein gemeinsames Maß haben, denn es ist notwendig, daß wir zulassen, daß zwei [gerade] Linien, die die gegebene Fläche bilden, rational genannt werden, wenn sie kommensurabel in der Länge sind, ohne daß die gegebene rationale Linie sie mißt, wenn nur die Quadrate, die aus ihnen entstehen, kommensurabel sind zu dem Quadrat aus jener [rationalen] Linie. Also diese Fläche ist, wie schon gezeigt wurde, rational, denn sie ist kommensurabel mit jedem einzelnen der Quadrate, die aus den Linien gebildet sind, die sie (die Fläche) umgeben, und diese Quadrate sind kommensurabel zu dem Quadrat der angenommenen rationalen Linie; also ist es notwendig, daß diese Fläche auch kommensurabel sei zu diesem Quadrat, mithin ist diese Fläche gewiß rational[86]). — Wenn wir nun die beiden gegebenen Linien in der Länge kommensurabel annehmen, aber jede inkommensurabel und zwar in der Länge und Potenz zu der angenommenen rationalen Linie, so wird auf keine Weise gezeigt werden können, daß die aus ihnen gebildete Fläche rational sei; freilich, wenn du die Länge mit der Breite multiplizierst, so wirst du die Flächenzahl finden, aber es wird kaum jemand[87]) beweisen (S. 17) wollen, daß sie rational sei; z. B. wenn das Verhältnis der zwei die Fläche bildenden Linien gleich 3 : 2 ist, so daß also die Fläche ohne Zweifel 6 mal eine gewisse Größe ist, ohne daß man bestimmt weiß, was diese Größe[88]) ist, denn die Hälfte bezw. das Drittel dieser Linien sind selbst irrational[89]). Es ist also nicht passend, wenn jemand sagt, es gebe zwei Arten rationaler Linien: zu der einen Art gehören diejenigen, welche von der zuerst gegebenen rationalen Linie gemessen werden, zu der andern die, welche von einer andern Linie gemessen werden, die mit der ersten nicht kommensurabel ist; sondern [es ist so]: es zerfallen die in der Länge kommensurabeln Linien in zwei Arten: zu der einen gehören diejenigen, die durch die zuerst gegebene rationale Linie gemessen werden, zu der andern die, welche durch eine andere Linie gemessen werden, die nicht kommensurabel ist zu jener [rationalen] Linie. Wir finden auch nicht, daß Euklides an irgend einem Orte die zu jener angenommenen rationalen Linie inkommensurabeln Linien rational nenne, und was ihn abhielt von diesem, war nicht sein Urteil über die rationalen Linien, daß sie bloß im Vergleich zu jener [ange-

86) Wie man sieht, kommen hier unnötige Wiederholungen vor.

87) Hier steht im Text ba'd oder bu'd (= Entfernung), es soll wohl heißen ba'ḍ = jemand, ein gewisser.

88) Der Text hat „diese sechsfache Größe“.

89) Siehe Anhang Nr. 3.



nommenen] Linie rational seien, sondern sein Urteil gründete sich auf ein anderes von ihm angenommenes Maß aus den Linien, die er rational nannte, und mit dem er jene maß[90]).

Was Plato anbetrifft, so gab er den rationalen Linien selbst abweichende Namen, er nannte die Linie, die in der Länge mit der gegebenen rationalen Linie kommensurabel ist, [einfach] „Länge“ und die bloß in Potenz zu ihr kommensurable [einfach] „Potenz“ und fügte zur Begründung hinzu: „denn sie ist kommensurabel mit der rationalen Linie in der Fläche, die sie potenziert[91]).“ Euklides aber nannte die kommensurable zu der gegebenen rationalen Linie rational, wie auch ihre Kommensurabilität zu dieser beschaffen sei[92]), ohne daß er Bedingungen (Klauseln) dazu aufstellte; dieses wurde zu Gründen der Verwirrung für diejenigen, welche bei ihm Linien fanden, die er rational nannte, und von denen die einen zu andern kommensurabel in der Länge waren, und doch inkommensurabel zu der angenommenen rationalen Linie; er meinte wohl nicht, daß alle rationalen Linien durch das gleiche Maß, d. h. durch die zuerst gegebene rationale Linie gemessen werden müßten, sondern (S. 18) er meinte, daß dieses Maß fallen gelassen werden müsse, obgleich in den Definitionen das Verhältnis des Rationalen zu ihm festgelegt worden war, und daß zu einem andern, dem ersten inkommensurabeln Maße übergegangen werden müsse, und so nannte er alle ähnlichen Linien, und es sind deren viele[93]), rational, denn sie sind zu der gegebenen rationalen Linie [wenigstens] in einer der verschiedenen Weisen, nämlich in der Potenz bloß, kommensurabel, und bezog ihre Kommensurabilität in der Länge auf ein anderes Maß; er meinte also mit diesem, daß die Kommensurabilität für diese Linien bestehen könne in beiden Arten (in der Länge und in der Potenz), die Rationalität aber nicht (in beiden Arten) (?).

Deshalb sagen wir, daß es unter den geraden Linien solche gibt, die durchaus nicht rational sind, und solche, die rational sind; die nicht rationalen sind diejenigen, deren Länge nicht kommensurabel zu der gegebenen rationalen Linie ist, und deren Potenz nicht kommensurabel zu der Potenz dieser Linie ist; die rationalen sind diejenigen, die kommensurabel zu der gegebenen rationalen Linie sind in irgend einer Weise (d. h. in der Länge oder nur in der Potenz); unter diesen rationalen gibt es solche, die zu andern kommensurabel sind in der Länge, und solche, die nur kommensurabel sind in der Potenz, und unter denjenigen, die kommensurabel sind zu andern in der Länge, gibt es solche, die kommensurabel sind zu der gegebenen rationalen Linie in der Länge, und solche, die zu ihr nicht kommensurabel sind [in der Länge, sondern nur in der Potenz], kurz [zusammengefaßt]: von allen rationalen Linien, kommensurabel in der Länge[94])

90) Der Schluß dieses Abschnittes ist nicht ganz klar, die Satzkonstruktion des Textes ist ziemlich schwierig.

91) Diese Stelle befindet sich im Dialog Theätetus (vergl. Biblioth. mathem. $\mathbf{10}_3$, S. 100).

92) Ob in der Länge oder nur in der Potenz.

93) Der Text hat tush'aru = sie sind bekannt, ich ersetzte dieses Wort durch takthuru = sie sind zahlreich.

94) Ich glaube, daß hier „Potenz“ stehen sollte oder besser gar nichts, jedenfalls ist



zu der gegebenen rationalen Linie, ist ein Teil kommensurabel zu einem andern in der Länge, und diese sind diejenigen, die zu der gegebenen rationalen Linie kommensurabel sind; und von den Linien, die zu der gegebenen rationalen Linie in der Potenz kommensurabel sind, und diese werden deshalb auch rational genannt, ist ein Teil kommensurabel zu einem andern in der Länge, aber nicht in Bezug auf jene gegebene [rationale] Linie, und ein Teil kommensurabel zu einem andern nur in der Potenz. Dies ist aus folgendem klar: Wenn wir eine Fläche (Rechteck) annehmen, die von zwei rationalen Linien gebildet wird, die [nur] in der Potenz kommensurabel zu der gegebenen [rationalen] Linie sind, aber die eine von ihnen kommensurabel zu der andern in der Länge ist, so wird diese Fläche rational sein; wird aber die Fläche gebildet von zwei unter sich und zur gegebenen rationalen Linie bloß in der Potenz kommensurabeln Linien, so ist diese Fläche medial[95]). Das ist die Quintessenz dessen, was wir über diese Dinge sagen wollten[96]). Ebenso ist klar, daß, wenn eine Fläche aus zwei rationalen [nur] in der Potenz kommensurabeln Linien gebildet wird, dann ihre zwei rationalen Seiten unter sich und mit der gegebenen rationalen Linie bloß in der Potenz kommensurabel sind, und wenn eine Fläche gebildet wird von zwei (S. 19) rationalen in der Länge kommensurabeln Linien, dann ihre zwei rationalen Seiten bald unter sich und mit der gegebenen rationalen Linie in der Länge kommensurabel sind, bald mit der gegebenen rationalen Linie bloß in der Potenz.

Es ist notwendig, daß dieser Gegenstand noch weiter verfolgt (betrachtet) werde: Wenn aus dem geometrischen Verhältnis die Mediallinie als geometrisches Mittel zwischen zwei rationalen, bloß in der Potenz kommensurabeln Linien gefunden worden ist und deshalb die Fläche potenziert, die von diesen zwei Linien gebildet wird, d. h. das Quadrat dieser Mediallinie ist gleich dem aus diesen zwei Linien gebildeten Rechteck, so sollte [eigentlich] in allen Fällen einem solchen Mittel der gleiche Name „Mediallinie“ beigelegt werden[97]) nach der Natur seiner beiden Komponenten (Seiten); denn die Linie, die die Fläche potenziert, die gebildet wird aus zwei rationalen, in der Länge kommensurabeln Linien, ist ohne Zweifel ein Mittel zwischen diesen beiden rationalen Linien, und die Linie, die die Fläche potenziert, die gebildet wird aus einer rationalen und einer irrationalen Linie, ist also auf dieselbe Weise gebildet [d. h. ist auch ein Mittel zwischen diesen beiden Linien], aber es wird keine von beiden „Mediallinie“ genannt, sondern er (Euklides) nennt nur Mediallinie die Linie, die die [im Anfang dieses Alinea] gegebene Fläche potenziert; er gibt also jeder Fläche den Namen der

das Folgende verdorben und keineswegs „kurz zusammengefaßt“ gegenüber dem Vorhergehenden, das wohl zu verstehen ist. Woepcke hat hier auch eine Glosse in den Text aufgenommen, die meines Erachtens die Sache noch unverständlicher macht.

95) Siehe Anhang Nr. 4.

96) Es kommt aber noch mehr dazu über denselben Gegenstand, dieser Satz ist also wohl irrtümlich hieher gesetzt worden statt an das Ende des Alinea, oder das Folgende ist eine Einschiebung, was sehr wahrscheinlich ist, da das, was es ausspricht, ganz selbstverständlich oder sogar naiv ist.

97) Etwas frei übersetzt, doch ist dies nach dem Folgenden jedenfalls der richtige Sinn.



sie potenzierenden Linie: so nennt er die Fläche, die von einer rationalen Linie potenziert wird, rational, und diejenige, die von einer medialen potenziert wird, medial.

Wiederum bringt er die Mediallinien in Verbindung (Vergleich) mit den rationalen, er sagt z. B., daß diese Linien ähnlich wie jene sich verhalten[98]): entweder seien sie kommensurabel in der Länge oder bloß in der Potenz, und daß die Fläche, die aus zwei Mediallinien gebildet ist, die in der Länge kommensurabel sind, durchaus medial sei, wie die Fläche, die aus zwei rationalen, in der Länge kommensurabeln Linien gebildet wird, durchaus rational sei; ferner daß die Fläche, die von zwei Mediallinien gebildet wird, durchaus rational sei; ferner daß die Fläche, die von zwei Mediallinien gebildet wird, die bloß in der Potenz kommensurabel sind, bald rational, bald medial sei; denn, wie die Mediallinie eine Fläche potenziert, die gebildet wird von zwei rationalen, nur in der Potenz (S. 20) kommensurabeln Linien, so potenziert auch die rationale Linie öfters eine Fläche, die von zwei nur in der Potenz kommensurabeln Mediallinien gebildet wird. So entsteht die mediale Fläche auf drei Arten: entweder wird sie gebildet von zwei rationalen, nur in der Potenz kommensurabeln Linien oder von zwei in der Länge kommensurabeln Mediallinien oder von zwei nur in der Potenz kommensurabeln Mediallinien; die rationale Fläche entsteht auf zwei Arten: entweder wird sie gebildet von zwei in der Länge kommensurabeln rationalen Linien oder von zwei in der Potenz kommensurabeln Mediallinien[99]). Die Ähnlichkeit besteht auch darin, daß die Linie, die als Mittel zwischen zwei medialen in der Länge kommensurabeln Linien genommen wird, ebensowohl eine Mediallinie ist wie die Linie, die als Mittel zwischen zwei rationalen, nur in der Potenz kommensurabeln Linien genommen wird, und ebenso, daß die Linie, die als Mittel zwischen zwei bloß in der Potenz kommensurabeln Mediallinien genommen wird, bald rational, bald medial ist, und daß also die Potenz [dieser Linie?] bald rational, bald medial wird, und dies deshalb, weil es möglich ist, zwei Mediallinien zu finden, die bloß in der Potenz kommensurabel sind, wie es auch möglich ist, daß zwei rationale Linien bloß in der Potenz kommensurabel sind. Es ist also notwendig, daß der Grund für die Verschiedenheit [der Benennung] der Flächen, die von diesen Linien gebildet werden, in der mittleren Proportionale gesucht werde, die zwischen den beiden Endgliedern (Länge und Breite der Fläche) liegt, und die also entweder eine Mediale zwischen zwei Rationalen oder eine Mediale zwischen zwei Medialen oder eine Rationale zwischen zwei Medialen sein kann; kurz also: bald ist das verbindende Glied (d. h. das Mittel) den beiden Endgliedern ähnlich, bald ist es nicht ähnlich zu denselben. Aber über diese Dinge haben wir nun genug gesagt.

[100]) Nachdem er (Euklides) sich mit der Betrachtung und der Konstruktion

98) Diese Ähnlichkeit wird nirgends ausdrücklich konstatiert, das kurze Lemma vor Satz 24 geht in der Vergleichung keineswegs so weit, wie hier gegangen ist; Pappus scheint die Vergleichungspunkte selbst aus den Sätzen 21—25 gezogen zu haben.

99) Siehe die Beispiele im Anhang Nr. 6.

100) Das Folgende bis S. 23, Z. 10 hatte Woepcke schon ins Französische übersetzt (in den in der Einleitung zitierten Mémoires. p. 693ff.).



der Mediallinie beschäftigt hat, beginnt er[101]) mit der Untersuchung der Irrationallinien, die durch Addition und Subtraktion entstehen, auf Grund seiner Untersuchungen über die Kommensurabilität und Inkommensurabilität; denn diese letzteren existieren auch bei den durch Addition und Subtraktion gebildeten Irrationallinien. Das Binomium (die zweinamige (Linie)) ist die erste der durch Addition (S. 21) gebildeten Linien, denn es hat noch am meisten Verwandtschaft mit der rationalen Linie, weil es aus zwei rationalen, in Potenz kommensurabeln Linien zusammengesetzt ist; die Apotome[102]) ist die erste der duch Subtraktion entstandenen Linien, weil sie entsteht, indem man von einer rationalen Linie eine rationale wegnimmt, die mit der ganzen in der Potenz kommensurabel ist. — Die Mediallinie erhalten wir z. B., wenn wir eine rationale Linie und eine Diagonale[103]) als gegeben annehmen und die mittlere geometrische Proportionale zwischen diesen beiden bestimmen; das Binomium erhalten wir dann, indem wir die Seite und die Diagonale durch Addition zusammensetzen; die Apotome endlich erhalten wir, indem wir die Seite von der Diagonale abziehen[104]). Es ist auch notwendig zu wissen, daß wir nicht nur dadurch, daß wir zwei rationale, nur in der Potenz kommensurable Linien addieren, ein Binomium erhalten, sondern wir können dasselbe auch erhalten durch drei oder vier solche Linien; im ersten Falle erhält man ein Trinomium, im zweiten ein Quadrinomium; so könnte man ohne Ende weiter gehen, und der Beweis, daß die aus drei (und mehr) rationalen in der Potenz kommensurabeln Linien zusammengesetzte Linie irrational sei, ist derselbe wie für das Binomium.

Aber es ist notwendig, daß wir nochmals [bei den Medialen] beginnen und sagen, daß wir nicht bloß eine mittlere Proportionale zwischen zwei rationalen, in der Potenz kommensurabeln Linien nehmen können, sondern daß wir deren [zwei] drei, vier und mehr bis ins Unendliche nehmen können, denn wir können zwischen irgend zwei geraden Linien so viele mittlere Proportionale nehmen, als wir wollen. Ebenso können wir bei den durch Addition gebildeten Irrationallinien nicht nur ein Binomium bilden, sondern wir können auch ein Trinomium konstruieren, ebenso eine erste oder zweite Trimediale und ebenso die aus drei in der Potenz inkommensurabeln Linien zusammengesetzte Linie, von denen eine mit jeder der beiden andern eine rationale Summe der Quadrate ergibt, während das Rechteck aus den beiden Linien medial ist, (S. 22), so daß also eine Major aus drei Linien

101) Woepcke hat hier aus den zwei Worten des Textes lammâ am'ana = nachdem er ernstlich nachgedacht hatte, den Satz gemacht: et après avoir consacré (aux sujets précédemment mentionnés) une partie considérable (du dixième livre); sie mögen ja wohl diesen Sinn haben, aber sicher ist dies nicht, ich habe sie unberücksichtigt gelassen.

102) Eigentlich „das Abschneiden, Beschneiden", hier „die durch Abschneiden entstandene (Linie)".

103) Deutlicher wäre wohl: „und die Diagonale des aus der rationalen Linie gebildeten Quadrates." Woepcke nimmt freilich in seinem Beispiel die Diagonale als a an, dann ist die Seite $= \sqrt{\frac{a^2}{2}}$.

104) Vergl. Anhang Nr. 7.

gebildet entsteht[105]). Auf dieselbe Weise erhält man die ein Rationales und Mediales Potenzierende zusammengesetzt aus drei Linien und ebenso die zwei Mediale Potenzierende. Denn, nehmen wir drei rationale, bloß in der Potenz kommensurable Linien an, so ist die aus zweien dieser Linien zusammengesetzte Linie, also das Binomium, irrational und deshalb das Rechteck, aus dieser Linie und der dritten gebildet, irrational, also auch das Doppelte dieses Rechteckes, mithin das Quadrat der ganzen aus drei Linien zusammengesetzten Linie auch irrational, also die Linie selbst irrational, und sie wird Trinomium genannt. Und wenn man vier in Potenz kommensurable Linien nimmt, wie wir oben schon gesagt haben, so wird das Verfahren genau dasselbe sein; ebenso behandelt man die übrigen Linien auf die gleiche Weise. Hat man ferner drei Mediallinien, in der Potenz kommensurabel, und eine von ihnen bilde mit jeder der beiden andern ein rationales Rechteck, dann ist die aus zwei Linien zusammengesetzte irrational und heißt die erste Bimediale, die übrigbleibende Linie ist medial, und das Rechteck aus diesen beiden ist ebenfalls irrational, also ist auch das Quadrat der ganzen Linie irrational [also auch die Linie selbst]. So verhält es sich auch mit den übrigen Linien; die Zusammensetzung von Linien kann also bei allen Linien, die durch Addition gebildet werden, bis ins Unendliche ausgedehnt werden.

Ebenso ist es nicht notwendig, daß wir bei den durch Subtraktion gebildeten Irrationallinien nur eine Subtraktion vornehmen, so daß also die Apotome, die erste und zweite Medialapotome, die Minor, die mit einem Rationalen ein mediales Ganzes Gebende und die mit einem Medialen ein mediales Ganzes Gebende entstehen; sondern wir lassen drei oder vier [oder mehr] Subtraktionen zu. Wenn wir dies tun, so beweisen wir auf ähnliche Art wie vorhin, daß die Restlinien irrational sind, und daß jede derselben wieder eine der Linien sei, die durch Subtraktion entstehen, d. h. z. B. daß, wenn wir von einer rationalen Linie eine rationale Linie subtrahieren, die zur ganzen in der Potenz kommensurabel ist, uns eine Apotome als Rest bleibt, und wenn wir von dieser weggenommenen[106]) Linie, (S. 23), die Euklides die „angefügte“[107]) nennt, eine weitere rationale Linie wegnehmen, die zu jener (der zuerst weggenommenen) in der Potenz kommensurabel ist, so erhalten wir wieder eine Apotome [eine dreigliedrige], und wenn wir von dieser abgeschnittenen[106]) Linie eine neue rationale Linie wegnehmen, die zu jener in der Potenz kommensurabel ist, so erhalten wir wieder eine Apotome [eine viergliedrige]. So könnte man auch bei den übrigen Irrationallinien verfahren, die durch Subtraktion entstehen, und es gibt auch hier kein Ende wie bei den Linien, die durch Addition entstehen, sondern die Sache kann bis ins Unendliche fortgesetzt werden[108]), bei diesen durch Vermehrung, bei jenen durch

105) Pappus dehnt also hier diese Erweiterung auch schon auf Irrationallinien aus, von denen gar noch nicht die Rede war, was er unserer Ansicht nach hätte vermeiden sollen.

106) Vergl. Anhang Nr. 8.

107) Griech. προσαρμόζουσα, was Woepcke und Heiberg mit congruens übersetzen, was hier kaum zulässig ist; es ist diejenige Linie, die, zur Apotome hinzugefügt, die rationale ganze Linie ergibt; arab. heißt es al-lifḳ = der angenähte Kleidersaum, das angefügte.

108) Dies ist nicht richtig, denn für die Subtraktion gibt es eine Beschränkung: die Summe der unendlich vielen Subtrahenden müßte eine endliche sein, kleiner als der Minuend.



Verminderung. So zeigt sich also die unendliche Zahl der irrationalen Größen auf gleiche Weise bei allen drei Entstehungsarten solcher Linien, ohne daß bei den medialen Linien die fortgesetzte Proportionalität an einem bestimmten Punkte aufhören muß, und ohne daß bei den durch Addition entstehenden Linien die Addition und bei den durch Subtraktion entstehenden die Subtraktion bei einer bestimmten Grenze haltmachen muß. Es ist nun notwendig, daß wir uns mit dem Gesagten über die Kenntnis der rationalen [und irrationalen] Größen begnügen.

(S. 23, Z 10) Wir kehren wieder zum Anfang zurück und beschreiben die [verschiedenen] Klassen. Wir sagen, daß die erste Klasse über die kommensurabeln und inkommensurabeln Größen handelt, und hier wird klargelegt, wo Kommensurabilität vorliege, was für Größen inkommensurabel seien, und wie es nötig sei, daß unterschieden werde zwischen Kommensurabilität und Inkommensurabilität in der Proportionalität, und daß es möglich sei, daß man [die Kommensurabilität und] die Inkommensurabilität auf zwei Arten auffassen könne: einmal in der Länge und in der Potenz, das anderemal bloß in der Potenz, und wie sie sich verhalten in der Zusammensetzung und in der Trennung (Subtraktion) und in der Vervielfachung und der Verminderung, und dies zu dem Zwecke, daß durch alle diese Sätze, es sind im ganzen deren 15[109]), wir bereichert werden im Verständnis der kommensurabeln und inkommensurabeln Größen.

Die zweite Klasse. In dieser werden erwähnt die rationalen Linien und die medialen, die zueinander kommensurabel sind in der Länge und in der Potenz, und ebenso die Flächen (Rechtecke), die von diesen Linien gebildet werden, ferner die Gleichartigkeit (Ähnlichkeit) der medialen mit der rationalen Linie, ebenso der Unterschied zwischen beiden und ihre Auffindung (Konstruktion) und, was diesem ähnlich ist. Und dies deshalb, weil die Behandlung der Frage, ob es möglich sei, nicht nur zwei rationale in der Länge kommensurable Linien zu finden, sondern auch zwei solche nur in der Potenz (S. 24) kommensurable Linien, zeigt, daß es möglich ist, zwei Linien zu der gegebenen rationalen Linie zu finden, von denen die eine in der Potenz, die andere nur in der Länge zu jener inkommensurabel ist; denn wenn wir zu der gegebenen Linie eine rationale, in der Länge inkommensurable Linie annehmen, so haben wir zwei rationale nur in der Potenz kommensurable Linien, und wenn wir zu diesen beiden das geometrische Mittel suchen, so haben wir die erste irrationale Linie [die Mediallinie][110]).

Die dritte Klasse. In dieser gibt er die Begründung für die Aufsuchung der irrationalen Linien, die durch Addition entstehen, und zwar dadurch, daß er zuerst zwei Mediallinien sucht, bloß in der Potenz kommensurabel, die ein rationales Rechteck bilden, hierauf zwei Mediallinien, bloß in der Potenz kommensurabel, die ein mediales Rechteck bilden, hierauf zwei nicht mediale und auch nicht rationale Linien [11]),

109) Sätze 1—15 (oder 18) des X. Buches.

110) Sätze 16(19)—26.

111) Euklides sagt einfach „Linien" (Satz 33): es sind Irrationallinien (aber keine Medial-



inkommensurabel in der Potenz, deren Quadrate eine rationale Summe haben, und die ein mediales Rechteck bilden, und im Gegensatz dazu zwei solche Linien, deren Quadrate eine mediale Summe haben, und die ein rationales Rechteck bilden; und endlich zwei Linien, deren Quadratsumme sowie das Rechteck aus ihnen medial sind, und die unter sich inkommensurabel sind. Alle diese Sätze und, was sonst noch in der dritten Klasse vorkommt, dienen nämlich nur zur Auffindung (Herstellung) der irrationalen Linien, die durch Addition entstehen, denn wenn er jeweilen die zwei aufgefundenen Linien addiert, so erhält er daraus diese irrationalen Linien [112]).

Die vierte Klasse. Er belehrt uns hier über die sechs Irrationallinien, die durch Addition entstehen. Die Addition findet bald zwischen zwei rationalen, in der Potenz kommensurabeln Linien statt (denn die in der Länge kommensurabeln Linien erzeugen nämlich durch Zusammensetzung eine rationale Linie) [113]), bald zwischen zwei medialen, in der Potenz kommensurabeln Linien (denn die in der Länge kommensurabeln Mediallinien erzeugen nämlich wieder eine Mediallinie) [113]), bald zwischen zwei [irrationalen], in der Potenz inkommensurabeln Linien [114]). Drei dieser Linien sind irrational aus dem Grunde, den wir erwähnt haben [115]), zwei, weil sie aus zwei in der Potenz kommensurabeln Mediallinien zusammengesetzt sind [116]), und eine, weil sie aus zwei rationalen, nur in der Potenz kommensurabeln Linien zusammengesetzt ist. Dies sind also im ganzen sechs Linien, und aus den Gründen, die in (S. 25) der dritten [117]) Klasse festgelegt wurden, ist die vierte Klasse entstanden, denn in dieser vierten Klasse zeigt er uns, wie er diese sechs Irrationallinien zusammensetzt, und zwar setzt er die drei ersten aus den in der Potenz kommensurabeln Linien, die drei letzten aus den in der Potenz inkommensurabeln Linien zusammen; und jede einzelne von diesen wählt er so, daß entweder die Summe ihrer Quadrate rational und das Rechteck aus ihnen medial, oder umgekehrt, die Summe ihrer Quadrate medial und das Rechteck rational ist, oder daß die Summe ihrer Quadrate sowohl als auch das Rechteck medial ist, und daß diese beiden Flächen inkommensurabel sind, denn wenn sie kommensurabel wären, so müßten auch die beiden zu einer Linie zusammengesetzten

---

linien), die eben besonderen Bedingungen unterworfen sind; als Beispiele führe ich an: $\sqrt{8+\sqrt{32}}$ und $\sqrt{8-\sqrt{32}}$, beide sind in Potenz inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist rational (16), ihr Produkt medial ($\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$).

112) Sätze 27—35.

113) Die in Klammern eingeschlossenen Sätze stehen im Text.

114) Der Text hat hier „zwischen zwei in absolutem Sinn genommenen, in der Länge kommensurabeln Linien“; den ersten Teil des Satzes hat Pappus vorher (s. S. 34) durch „nicht rationale und auch nicht mediale“ wiedergegeben, der zweite Teil, nämlich „in der Länge kommensurabeln Linien“, ist falsch.

115) Nämlich, weil sie aus zwei irrationalen, in der Potenz inkommensurabeln Linien zusammengesetzt sind.

116) Hier hätte Pappus ebenso gut wieder sagen können: „aus dem Grunde, den wir erwähnt haben.“

117) Der Text hat „vierten“.



Teile[118]) in der Länge kommensurabel sein [was gegen die Voraussetzung wäre[119]). — Er beweist dann auch die Umkehrung dieser Sätze, und zwar für alle auf dieselbe Weise, daß nämlich jede einzelne von diesen sechs Irrationallinien nur in einem einzigen Punkte geteilt wird, und zwar indem er zeigt, daß z. B. zwei rationale, nur in der Potenz kommensurable Linien zusammengesetzt ein Binomium ergeben, und umgekehrt, wenn dieses Binomium gegeben ist, daß es dann nur zusammengesetzt sein kann aus jenen zwei Linien und nicht aus zwei andern. So geht er auch bei den übrigen Irrationallinien [dieser Klasse] vor. Diese Klasse umfaßt also zwei mal sechs Sätze[120]), die ersten sechs [handeln] über die Zusammensetzung der sechs Irrationallinien, die letzten sechs beweisen ihre Umkehrungen.

Die fünfte Klasse. In dieser Klasse lehrt er, wie man die Binomialen[121]) findet, es sind dies [ebenfalls] Linien, die durch Addition gebildet werden[122]), und sie werden auf sechs verschiedene Arten konstruiert[123]); damit meine ich nicht, daß er dies aus bloßer Lust (Neigung) zu solchen Dingen tue, sondern er macht es als Vorbereitung für die [genauere] Kenntnis der Verschiedenheiten der [ersten] sechs Irrationallinien, die durch Addition entstehen, durch welche (Kenntnis) es eben möglich wird, die Eigenschaften der Flächen zu ergründen, die durch sie (jene Linien) potenziert werden[124]).

Die sechste Klasse. In dieser untersucht er nun eben diese Flächen; er beweist, daß das Binomium die Fläche potenziert, die durch die gegebene rationale Linie und die erste Binomiale gebildet wird[125]), daß die erste Bimediale die Fläche potenziert, die (S. 26) durch die rationale Linie und die zweite Binomiale gebildet wird, u. s. f. Diese Linien potenzieren also sechs Flächen, die alle je von der rationalen Linie und einer der sechs Binomialen gebildet werden[126]).

Die siebente Klasse. Er erwähnt darin die Eigenschaften, die die sechs Irrationalen [der ersten Hexade], die durch Addition entstehen, mit Linien derselben Art gemeinsam haben, indem er z. B. zeigt, daß die jeder einzelnen dieser Linien kommensurable Linie eine Linie gleicher Art sei; ferner beweist er, daß, wenn das Quadrat (Potenz) einer solchen Linie an die gegebene rationale Linie angelegt wird, die Breite der so entstehenden Fläche die entsprechende Linie

118) Der Text hat „die beiden zusammengesetzten Linien".

119) Vergl. Anhang Nr. 9.

120) Sätze 36–47.

121) Der griech. und arab. Text des Euklides hat für diese sechs Linien (allerdings mit den Zusätzen „erste" bis „sechste") das gleiche Wort wie für die erste Linie der ersten Hexade, nämlich Binomium; da sie sich aber von diesem Binomium durch besondere Eigenschaften unterscheiden, habe ich nach Nesselmann für diese Binome das Wort „Binomiale" gewählt.

122) Pappus hat irreführend: „wie man das Binomium findet, und es ist dies die erste der Linien, die durch Addition gebildet werden."

123) Wörtlich „gewendet", „konjugiert".

124) Sätze 48—53.

125) D. h. das Binomium ist die Quadratwurzel aus dieser Fläche, wenn die rationale Linie als 1 angenommen wird.

126) Sätze 54–59.



der zweiten Hexade ist[127]), gleichsam als Umkehrungen der sechs Sätze, die in der sechsten Klasse erwähnt worden sind[128]).

Die achte Klasse. Er leitet darin die Verschiedenheiten der sechs Irrationallinien [der ersten Hexade], die durch Addition entstehen, aus den Flächen ab, die von ihnen potenziert werden, indem er auf klare Weise zeigt, wie durch Zusammensetzung einer rationalen und einer medialen oder zweier medialen Flächen die unterscheidenden Eigenschaften jener irrationalen Linien entstehen[129]).

Die neunte Klasse. Nach diesen Dingen behandelt er in dieser Klasse die sechs Irrationallinien [der dritten Hexade], die durch Subtraktion entstehen, auf dieselbe Weise, wie er die durch Addition entstehenden [der ersten Hexade] behandelt hat. Er setzt die Apotome entsprechend dem Binomium, und zwar so, daß die beiden Linien, aus denen das Binomium zusammengesetzt ist, auch die Apotome ergeben, wenn die kleinere von der größeren weggenommen wird, ferner setzt er die erste Medialapotome entsprechend der ersten Bimedialen, die zweite Medialapotome entsprechend der zweiten Bimedialen, die Minor der Major, die mit einem Rationalen ein mediales Ganzes gebende der ein Rationales und Mediales Potenzierenden und die mit einem Medialen ein mediales Ganzes gebende der zwei Mediale Potenzierenden entsprechend; hieraus ist der Grund ihrer Benennung klar ersichtlich. Und wie bei den Linien, die durch Addition entstanden sind, bewiesen wurde, daß sie nur in einem Punkte geteilt werden, wird folgerichtig auch für diese Linien, die durch Subtraktion entstehen, gezeigt, daß jede einzelne von ihnen nur durch einunddieselbe Subtraktion[130]) erhalten werden kann[131]).

(S. 27) Die zehnte Klasse. In dieser werden Apotomen gefunden auf dieselbe Weise, wie dies bei den Binomialen geschehen ist, und es werden auch wieder sechs Unterarten dieser Irrationallinien definiert, zu denen dann in der elften Klasse die Beweise folgen, daß die sechs Linien [der dritten Hexade], die durch Subtraktion entstehen, diejenigen sind, die eine Fläche potenzieren, die gebildet wird aus einer [gegebenen] rationalen Linie und einer von den sechs Apotomeen [der vierten Hexade] der Reihe nach[132]).

Die zwölfte Klasse. Nach dem diese Untersuchungen in der elften Klasse gemacht worden sind, behandelt er in der zwölften die Verwandtschaften von Irrationallinien derselben Art, indem er z. B. zeigt, daß die kommensurable zu

127) Der Text hat hier etwas Unverständliches: „ferner bestimmt er, wenn das Quadrat dieser Linie an die gegebene rationale Linie angelegt wird, die Breiten der so entstehenden Flächen und findet so sechs andere Linien, gleichsam als“ . . .

128) Sätze 60—65 und 66—70; von den letzten fünf Sätzen aber spricht er zuerst; wir halten dafür, daß diese ursprünglich zur folgenden 8. Klasse gehört haben, so daß diese also die Sätze 66—72 umfaßt hätte. — Vergl. auch Anhang Nr. 10.

129) Sätze 71 und 72.

130) Z. B. $7 - \sqrt{5}$ kann durch keine andere Differenz einer rationalen und irrationalen Zahl ersetzt werden, oder allgemein: $a - \sqrt{b}$ kann nicht gleich $c - \sqrt{d}$ sein, wenn nicht zugleich $a = c$, und $b = d$ ist.

131) Sätze 73—84. Vergl. auch Anhang Nr. 11.

132) Sätze 85—96. Vergl. auch Anhang Nr. 12.



jeder einzelnen von ihnen wieder von derselben Art sein müsse; dann behandelt er auch die Verschiedenheiten, die unter ihnen bestehen, und diese werden dargelegt durch die Flächen, die, angelegt an die rationale Linie, die verschiedenen [Irrationallinien der vierten Hexade als] Breiten erzeugen[133]).

Nachdem er so zur dreizehnten Klasse gekommen ist, beweist er [in dieser], daß die sechs Irrationallinien, die durch Addition entstehen, verschieden sind[134]) von denen, die durch Subtraktion entstehen, und daß diejenigen, die durch Subtraktion entstehen, auch unter sich verschieden sind, und zwar unterscheidet er [letztere] nach der Subtraktion der Flächen, wie dies auch bei den Linien, die durch Addition entstehen, nach der Addition der Flächen geschehen ist, z. B. wenn eine mediale Fläche (Rechteck) von einer rationalen abgeschnitten wird oder eine rationale von einer medialen oder eine mediale von einer medialen, so erweisen sich die Linien, die diese Restflächen potenzieren, als die Irrationallinien, die durch Subtraktion entstehen[135]). Am Schlusse findet er, indem er die Unendlichkeit der Zahl der Irrationallinien zeigen will, Linien ohne Zahl, verschieden in der Art, und doch alle aus [einer], der Mediallinie entstanden[136]). Mit dieser Betrachtung schließt er die Abhandlung [das X. Buch] und verläßt das Irrationale, das man bis ins Unendliche ausdehnen könnte[137]).

Beendigt ist der erste Teil des Kommentars
zum X. Buche [des Euklides].

II. Teil.

(S. 29) Das, was zu wissen notwendig ist über die Ordnung (Einteilung) der Irrationallinien, ist in Kürze folgendes: Euklides hat uns zuerst belehrt über die geordneten unter ihnen, die mit den rationalen Linien gleichartig sind; denn die Irrationallinien zerfallen in ungeordnete, die der formlosen Materie, die man die vergängliche[138]) nennt, angehören (entsprechen), und deren Zahl sich bis ins Unendliche erstreckt, und in geordnete, mit denen die Wissenschaft sich beschäftigt, und die sich zu jenen (den ungeordneten) verhalten wie die Rationalen zu ihnen (d. h. den geordneten). Euklides beschäftigte sich also nur mit den geordneten, die den rationalen gleichartig (entsprechend) sind, und die sich nicht weit von jenen entfernen (in ihrem Wesen). Dann hat Apollonius sich [auch] mit den ungeordneten beschäftigt, die sich von den Rationalen viel weiter entfernen.

Ebenso ist es notwendig zu wissen, daß die irrationalen Linien auf drei Wegen gefunden werden: durch Proportionalität, durch Zusammensetzung (S. 30) (Addition) und durch Trennung (Subtraktion), sonst durchaus auf keine andere

133) Sätze 97—107.

134) D. h. nie die gleichen Werte (Längen) haben können.

135) Sätze 108—111.

136) Satz 115.

137) Vergl. Anhang Nr. 13.

138) Das arab. Wort kann gelesen werden ma·awwira oder ma'awwara, im letzteren Falle wäre es mit „verdorbene" zu übersetzen.



Art, denn die ungeordneten werden von den geordneten auch nur auf diesen [drei] Wegen abgeleitet. Euklides hat nun auf dem Wege der Proportionalität nur eine Irrationallinie gefunden, auf dem Wege der Addition sechs und ebenso sechs auf dem Wege der Subtraktion, und damit ist die Zahl der geordneten Irrationallinien erschöpft[139]).

(S. 30, Z. 5) Drittens ist es notwendig, daß wir bei allen Irrationallinien die Flächen studieren, die sie potenzieren (d. h. also ihre Quadrate), und alle die Verschiedenheiten, die die einen von den andern trennen; es ist weiter nötig, daß wir untersuchen, welche Flächen potenziert werden von den Teilen jeder Irrationallinie, und welche von der ganzen Linie[140]); auf diese Weise finden wir z. B., daß die Mediallinie eine Fläche potenziert, die gebildet wird von zwei rationalen, nur in Potenz kommensurabeln Linien, und so finden wir es von jeder einzelnen der übrigen Linien. Deshalb behandelt er auch die Beziehungen der Potenzierung[141]) bei jeder einzelnen dieser Linien und sucht die Breiten der [angelegten] Flächen, und zuletzt setzt er die Flächen selbst zusammen, was zur Erreichung (Text: Erklärung) seines Zweckes notwendig ist. Dann ordnet er [hiernach] die Irrationalen, die durch Addition entstehen: wenn z. B. eine rationale und eine mediale [Fläche] zusammengesetzt werden, so entstehen hieraus vier irrationale Linien [als Potenzierende der zusammengesetzten Fläche], und wenn zwei mediale [Flächen] zusammengesetzt werden, so entstehen daraus die übrigen zwei [irrationalen] Linien; diese Linien können also auch zusammengesetzte genannt werden mit Rücksicht auf die Zusammensetzung der Flächen, ganz ebenso wie die Linien, die durch Subtraktion entstehen, getrennte (Apotomen) genannt werden können mit Rücksicht auf die Trennung (Subtraktion) der Flächen, die sie potenzieren; auch die Mediallinie wird nur so genannt, weil das Quadrat derselben gleich dem Rechteck ist, das aus zwei rationalen, nur in der Potenz kommensurabeln Linien gebildet wird.

Nachdem wir nun diese Dinge vorausgeschickt und erklärt (wörtlich „geebnet") haben, ist es nötig, daß wir bemerken, daß jedes Rechteck entweder aus zwei rationalen oder aus zwei irrationalen oder aus einer rationalen und einer irrationalen Linie (S. 31) gebildet wird, und daß im ersten Falle die beiden rationalen Linien entweder kommensurabel in der Länge oder nur kommensurabel in der Potenz sein können, daß im zweiten Falle ebenfalls die beiden Linien entweder kommensurabel in der Länge oder nur kommensurabel in der Potenz oder inkommensurabel in Länge und Potenz sein können, und daß im dritten Falle beide Linien unzweifelhaft inkommensurabel sein müssen[142]). Wenn die gegebene Fläche von zwei rationalen Linien gebildet wird, die in der Länge

139) Diesen Anfang des 2. Teils bis hieher (im arab. Text bis S. 30, Z. 4) hat ebenfalls Woepcke schon (l. c., p. 701) ins Französische übersetzt. — Vergl. Anhang Nr. 14.

140) Dies ist frei übersetzt, die Stelle des Textes ist grammatikalisch ziemlich verwickelt, hat aber jedenfalls diesen Sinn.

141) Das richtige wäre wohl: „die Anlegung der potenzierten Flächen".

142) Denn eine rationale und eine irrationale Linie sind stets inkommensurabel (im modernen Sinne wie bei Euklides).



kommensurabel sind, so ist die Fläche rational, wie der Geometer bewiesen hat[143]), sind sie aber nur in der Potenz kommensurabel, dann ist die Fläche irrational und wird eine mediale genannt, und die Linie, die sie potenziert[144]), heißt Mediale oder Mediallinie, und dies beweist ebenfalls der Geometer[145]). Sind beide Linien, die die Fläche bilden, irrational, so kann die Fläche in gewissen Fällen rational, in andern irrational sein: sind die beiden irrationalen Linien in der Länge kommensurabel, dann ist die Fläche ohne Zweifel irrational, wie bei den Mediallinien bewiesen wird[146]) (die Beweisart, die hier angewandt wird, findet sich bei allen Irrationallinien)[147]); sind sie nur in Potenz kommensurabel, so kann die Fläche sowohl rational als irrational sein: Euklides beweist nämlich, daß die Fläche, die von zwei Mediallinien gebildet wird, die in der Potenz kommensurabel sind, entweder rational oder irrational ist[148]). Sind beide Linien inkommensurabel in jeder Hinsicht, so kann die Fläche, die von ihnen gebildet wird, ebenfalls rational oder irrational sein, denn es können zwei in der Potenz inkommensurable Linien gefunden werden, die eine rationale Fläche bilden[149]), und ebenso können zwei andere solche Linien gefunden werden, die eine mediale Fläche bilden[150]); das ist der Sinn unserer Ausdrucksweise „beide inkommensurabel in jeder Hinsicht“, denn die inkommensurabeln in der Potenz sind ohne Zweifel auch inkommensurabel in der Länge.

Die Mediallinie also, die durch geometrische Proportion gefunden wird, (S. 32) potenziert ein mediales Rechteck, und dieses ist gleich der Fläche, welche von zwei in der Potenz kommensurabeln, rationalen Linien gebildet wird, und so verhält es sich mit jeder Fläche, die er mit diesem Namen (mediales Rechteck) benennt. Was die sechs Irrationallinien anbetrifft, die durch Addition entstehen, so leitet er sie ab mit Hilfe der Zusammensetzung der Flächen; diese Flächen sind teils rational, teils medial, denn wie wir die Mediallinie nur aus den rationalen [Linien] finden und sie so definieren, so finden wir die irrationalen Linien, die durch Addition entstehen, mit Hilfe der rationalen und medialen Linien; denn es ist immer nötig, daß die irrationalen [Linien], die den rationalen näher stehen[151]), uns nützen für die Kenntnis (Erforschung) derjenigen, die ihnen ferner stehen, wir finden z. B. die Linien, die durch Subtraktion entstehen, auch erst aus denen, die durch Addition entstehen, also behandeln wir jene erst zuletzt.

---

143) Satz 19.

144) D. h. die Quadratwurzel aus dieser Fläche.

145) Satz 21. Pappus wiederholt den Lehrsatz nochmals, der eigentlich schon in den vorhergehenden Worten ausgesprochen ist; ich lasse solche Wiederholungen, die noch öfters vorkommen, weg.

146) Satz 24.

147) Dieser eingeschobene Satz steht im Text.

148) Satz 25.

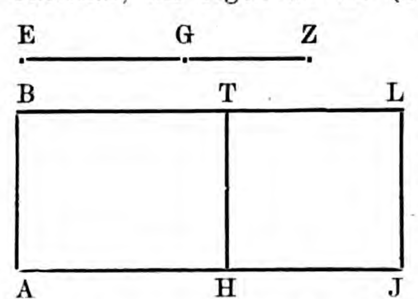
149) Satz 34.

150) Satz 33.

151) Dies sind die Mediallinien, die den rationalen näher stehen als die übrigen Irrationallinien.

Die Linien, die durch Addition entstehen, finden wir nun, indem wir zwei gerade Linien annehmen [und zusammensetzen], die entweder kommensurabel nur in der Potenz oder inkommensurabel in der Länge und in der Potenz sein können, denn die in der Länge kommensurabeln können unmöglich gebraucht werden zur Auffindung dieser Irrationallinien, denn die aus zwei in der Länge kommensurabeln Linien zusammengesetzte ist mit den einzelnen Linien gleichartig: sind diese also rational, so ist ihre Summe auch rational, sind sie medial, so ist ihre Summe ebenfalls medial, denn wenn zwei kommensurable Größen zusammengesetzt (addiert) werden, so ist ihre Summe auch kommensurabel jeder einzelnen von ihnen, und das Kommensurable zum Rationalen ist rational und das Kommensurable zum Medialen medial[152]).

Es ist also durchaus notwendig, daß die beiden zusammenzusetzenden Linien entweder kommensurabel in der Potenz oder inkommensurabel in Länge und Potenz seien. Sie seien nun zuerst kommensurabel in der Potenz; dann unterscheiden wir die möglichen Fälle und sagen: Entweder ist die Summe ihrer Quadrate rational, und das Rechteck aus ihnen medial, oder beide sind medial, oder die Summe ihrer Quadrate ist medial, und das Rechteck aus ihnen rational, oder beide sind rational[153]). Wenn nun beide rational sind, so ist die ganze Linie rational[154]). Es seien also beide [d. h. Summe der Quadrate und Rechteck] rational; wir legen an die (S. 33) rationale Linie AB, das Rechteck AL an, das



gleich dem Quadrat der ganzen Linie EZ ist, und wir schneiden von ihm (dem Rechteck) das Rechteck AT ab, das gleich der Summe der Quadrate von EG und GZ sei, so ist das übrigbleibende Rechteck HL gleich dem doppelten Rechteck aus EG und GZ, weil nun jedes einzelne der Rechtecke, die an die rationale Linie AB angelegt wurden, [nach Voraussetzung] rational ist, so ist auch jede einzelne der Linien AH, HJ rational und kommensurabel zu AB in der Länge, also ist jede einzelne zur andern kommensurabel, also auch die ganze Linie AJ kommensurabel zu ihnen und zur Linie AB, also ist das Rechteck AL rational, also notwendig auch das Quadrat von EZ, also auch EZ. Also geht es nicht an, daß wir jede einzelne von ihnen rational annehmen, d. h. die Summe der Quadrate von EG und GZ, und das Rechteck aus ihnen, also bleibt nur noch übrig, daß die Summe der Quadrate rational und das Reckteck medial sei, oder umgekehrt, oder daß beide medial seien[155]). Wenn nun die Summe der Quadrate rational und das Rechteck medial ist, dann ist die ganze Linie ein Binomium, das ein rationales und mediales Rechteck potenziert, und wo das rationale größer

152) Wiederholungen! Das Gleiche ist auch schon oben, S. 15 und 35, gesagt worden

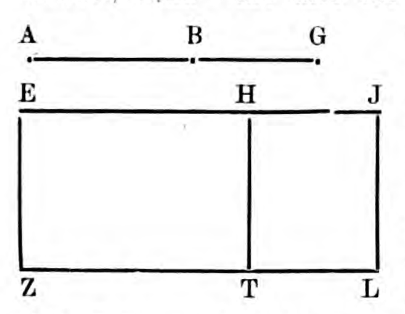
153) Diese Anordnung der verschiedenen Fälle ist nicht gerade konsequent und auch der Behandlung bei Euklid nicht entsprechend.

154) Hier fehlt: „was wir im folgenden zeigen wollen."

155) Hier ist die Anordnung der Fälle der Euklidischen entsprechend.



ist als das mediale, denn es ist schon bewiesen worden, daß, wenn eine Linie in zwei ungleiche Teile geteilt wird, das doppelte Rechteck aus diesen beiden Teilen kleiner ist als die Summe der Quadrate der beiden Teile. Wenn sich nun aber die Sache umgekehrt verhält, d. h. wenn die Summe der Quadrate medial und das Rechteck rational ist, dann ist die ganze Linie irrational und heißt die erste Bimediale, sie potenziert also ein rationales und mediales Rechteck, und das mediale ist größer als das rationale. Wenn endlich beide Flächen medial sind, denn dies ist der Fall, der noch übrig bleibt, d. h. wenn die Summe der Quadrate beider Teile und das Rechteck aus ihnen medial sind, so ist die ganze Linie irrational und heißt die zweite Bimediale, sie potenziert zwei mediale Rechtecke, und ich sage, (S. 34) daß diese beiden medialen [Rechtecke] inkommensurabel sind. Wenn sie nicht so wären, so seien sie also kommensurabel, dann wäre also die Summe der Quadrate aus AB und BG kommensurabel zum Rechteck AB, BG; aber $AB^2 + BG^2$ ist kommensurabel zum Quadrat von AB, denn AB^2 ist kommensurabel zu BG^2, weil angenommen wurde, daß die Linien AB und GB in der Potenz kommensurabel seien [156]); denn wenn zwei kommensurable Linien zusammengesetzt werden, so ist ihre Summe kommensurabel zu jeder einzelnen von ihnen; nun wäre also das Quadrat von AB kommensurabel zum Rechteck AB . BG, es besteht aber die Proportion: $AB^2 : AB \cdot BG = AB : BG$, also müßte auch AB kommensurabel in der Länge zu BG sein, das ist aber gegen die Voraussetzung, nach der sie bloß in der Potenz kommensurabel angenommen wurden, also ist die Summe der Quadrate von AB und GB durchaus inkommensurabel zum Rechteck aus diesen Linien [157]). Das sind nun die drei Irrationallinien, die aus der Zusammensetzung von zwei in der Potenz kommensurabeln Linien entstehen.



Es entstehen nun auch noch drei andere, wenn diese Linien [die zusammengesetzt werden] inkommensurabel in der Potenz sind. Es seien AB, BG (siehe vorige Figur) zwei Linien inkommensurabel in der Potenz, so kann nun entweder die Summe ihrer Quadrate rational und das Rechteck aus ihnen rational sein, oder beide medial oder das eine rational und das andere medial; der letztere Fall kann aber auf zwei Arten eintreten wie bei den in der Potenz kommensurabeln Linien. Aber wenn die Summe der Quadrate sowohl wie das Rechteck rational wären, so müßte auch die ganze Linie [AG] rational sein: Es werde wieder eine rationale Linie [EZ] angenommen, und an sie ein Rechteck EL angelegt gleich dem Quadrat von AG, dann schneide man von diesem Rechteck ein anderes ab, das gleich der Summe der Quadrate von AB und BG ist, es sei das Rechteck ET, dann

156) Der folgende Satz „denn wenn . . . von ihnen“ paßt nicht hieher, es müßte denn das Wort „Linien“ durch „Flächen“ ersetzt werden.

157) Im Text stimmen die Buchstaben dieses Beweises nicht mit denen der Figur, statt B ist stets unrichtig G geschrieben; auch die Form des Beweises mußte von mir etwas abgeändert werden, sie ist im Text nicht recht verständlich.

ist [der Rest] HL gleich dem doppelten Rechteck aus AB und BG, also sind ET und HL beide rational und beide angelegt an die rationale Linie EZ, also erzeugt jedes von ihnen eine rationale Breite, kommensurabel zu EZ, also sind auch EH und HJ kommensurabel, also EJ kommensurabel zu jeder einzelnen von ihnen, also ist sie rational und kommensurabel (S. 35) in der Länge zu EZ, und das Rechteck, das aus zwei rationalen, in der Länge kommensurabeln Linien gebildet ist, ist rational, also ist Rechteck EL rational, also auch das Quadrat von AG, also auch AG rational, weil die Linie, die eine rationale Fläche potenziert, rational ist. Dieser Fall kann also gar nicht eintreten, weil vorausgesetzt wurde, daß die ganze Linie irrational sein müsse. Es können nun entweder beide Flächen [Summe der Quadrate und das Rechteck aus beiden Teilen] medial oder die eine rational und die andere medial sein; das letztere kann aber auf zwei Arten stattfinden, indem die rationale größer sein kann oder die mediale; daß beide gleich seien, ist nicht möglich, weil sie dann kommensurabel wären, und so das Rationale medial und das Mediale rational wäre. Es sei nun die Summe der Quadrate von AB und BG rational und das Rechteck aus ihnen medial, so nennt er AG die Major, weil das Rationale das größere ist. Wenn aber die Sache sich umgekehrt verhält, d. h. wenn die Summe der Quadrate von AB und BG medial, das Rechteck aus ihnen aber rational ist, so nennt er AG die ein Rationales und Mediales Potenzierende, und dies deshalb, weil es nötig ist, daß sie benannt werde nach jeder der beiden Flächen, nach der rationalen, weil diese von Natur die trefflichere (hervorragendere) ist, und nach der medialen, weil sie in diesem Falle die größere ist[158]. Wenn beide Flächen medial sind, so nennt er die ganze Linie die zwei Mediale Potenzierende, und auch hier fügt Euklides hinzu, daß die beiden Medialen inkommensurabel seien.

Bei diesen Irrationallinien, die durch Addition entstehen, ist es für uns nicht nötig anzunehmen, es werden Linien zusammengesetzt, sondern es sind die Flächen zusammengesetzt, die sie potenzieren[159]. Auf diese Sache weist Euklides nur kurz hin am Ende des Buches, indem er zeigt, daß, wenn eine rationale und eine mediale Fläche zusammengesetzt werden, aus dieser Zusammensetzung vier Irrationallinien entstehen, und daß, wenn zwei mediale Flächen zusammengesetzt werden, aus dieser Zusammensetzung die zwei übrigen entstehen[160]; für uns ist aber klar[161], daß, wenn die zwei Teile [die zusammengesetzt werden] in der Potenz kommensurabel sind, dann notwendig drei Irrationallinien entstehen,

158) Es ist zweifelhaft, ob der Kommentator hier und bei der Major die richtigen Gründe für die Benennung dieser Irrationallinien getroffen habe. Für den Namen „Major“ (und den entsprechenden „Minor“ bei den durch Subtraktion entstehenden Linien) sind schon verschiedene Meinungen aufgestellt worden, wir wollen dieselben nicht durch eine neue vermehren.

159) Dies ist eine etwas sonderbare Auffassung, für uns tritt die Zusammensetzung von zwei Linien in den Vordergrund.

160) Sätze 71 und 72 (also nicht am Ende!).

161) Dies soll wohl heißen: unsere (des Kommentators) Auffassung ist etwas abweichend, aber klarer als die des Euklides.



und wenn sie in der Potenz inkommensurabel sind, dann die drei andern entstehen; denn es ist nicht möglich, daß sie auch in der Länge kommensurabel sein können[162]). Aber es ist notwendig (S. 36) passend), daß wir untersuchen, weshalb er, nachdem er das in der Potenz Kommensurable behandelt hat, auch seine Arten erwähnt und sagt: zwei Rationale in der Potenz kommensurabel oder zwei Mediale, und ebenfalls weshalb er, nachdem er das in der Potenz Inkommensurable festgesetzt hat, es nicht in Rationales und Mediales trennt[163]). Es wäre nötig gewesen, daß er dies auch hier gesagt hätte, wie er es getan hat, als er zwei in der Potenz kommensurable Linien zusammengesetzt hat; er nahm also die Summe der Quadrate[164]) medial und das Rechteck aus beiden rational an[165]), dann ist die ganze Linie irrational, und er nannte sie die erste Bimediale, und ebenso verfuhr er bei der zweiten Bimedialen. In gleicher Weise drückt er sich aus bei den in der Potenz inkommensurabeln Linien, ohne daß er sie medial oder rational nennt, er sagt dies eben nur bei den Flächen, d. h. bei der Summe ihrer Quadrate und bei ihrem Rechteck, er nimmt sie entweder beide medial an oder das eine rational und das andere medial und das größere von ihnen entweder rational oder medial. Ich glaube also, daß Euklides sagen wollte (oder meinte oder für wahr hielt), daß, wenn zwei Linien in Potenz kommensurabel [gegeben] sind und die Summe ihrer Quadrate rational ist, dann auch jedes einzelne Quadrat rational ist, und daß, wenn die Summe ihrer Quadrate medial ist, dann auch jedes einzelne Quadrat medial ist; wenn aber die zwei Linien in der Potenz inkommensurabel sind und die Summe ihrer Quadrate rational ist, dann nicht das Quadrat jeder von ihnen rational ist, und wenn die Summe ihrer Quadrate medial ist, dann nicht das Quadrat jeder von ihnen medial ist. Deshalb nannte er, als er die kommensurablen [Linien] in der Potenz annahm (definierte?), sie das eine Mal rational, das andere Mal medial, denn die Linien, die rationale Flächen potenzieren, sind rational, und die, die mediale Flächen potenzieren, sind medial; als er aber die in der Potenz inkommensurabeln Linien annahm (definierte?), hatte er nicht nötig, in der Benennung zwischen rationalen und medialen zu unterscheiden, es war nur nötig, daß er die Linien rational nannte, von denen jede einzelne eine rationale Fläche potenzierte, und nicht jene Linien, deren Quadratsumme rational ist (denn die beiden Quadrate brauchen deshalb nicht rational zu sein, weil das rationale Rechteck durchaus nicht immer in zwei rationale Rechtecke zerfällt)[166]), und ebenso war es nur nötig, daß er die

162) Wie schon oben gezeigt worden ist.

163) Der Text hat: „es nicht rationales und mediales nennt."

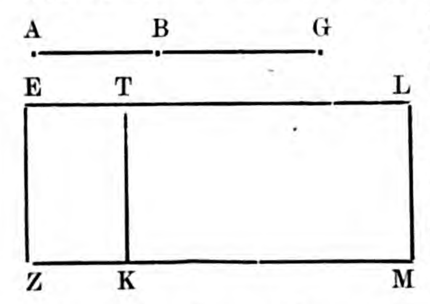
164) Der Text hat irrtümlich „ihrer Flächen".

165) Der Text hat umgekehrt: „Summe der Quadrate rational und das Rechteck aus beiden medial."

166) Die in Klammern gesetzten Sätze stehen im Text; ein Beispiel für den ersten Fall ist das rationale Rechteck 12, es kann in die zwei irrationalen Rechtecke $6+\sqrt{6}$ und $6-\sqrt{5}$ zerlegt werden; ein Beispiel für den zweiten Fall ist das mediale Rechteck $8\sqrt{3}$, es kann in die zwei irrationalen (aber nicht medialen) Rechtecke $4\sqrt{3}+6$ und $4\sqrt{3}-6$ zerlegt werden.

Linien medial nannte, von denen jede einzelne ein mediales Rechteck potenziert, und nicht jene Linien, (S. 37) deren Quadratsumme medial ist (denn die beiden Quadrate brauchen deshalb nicht medial zu sein, weil das mediale Rechteck durchaus nicht immer in zwei mediale Rechtecke zerfällt)[166]).

Das ist nun also sein (Euklids) Gedankengang; aber es bedarf eines Beweises, daß, wenn zwei in der Potenz kommensurable Linien gegeben sind und die Summe ihrer Quadrate rational oder medial ist, sie [d. h. die einzelnen Quadrate] dann selbst rational oder medial sind; daß aber, wenn die Linien in der Potenz inkommensurabel sind, dieser Schluß dann nicht mehr statthaft (richtig) ist. Es seien die beiden Linien AB und BG in der Potenz kommensurabel, und es sei die Summe ihrer Quadrate rational, so sage ich, daß auch die einzelnen Quadrate[167]) rational sind: denn, weil AB in der Potenz kommensurabel zu BG ist, so ist AB^2 kommensurabel zu BG^2, also auch $AB^2 + BG^2$ kommensurabel zu jedem einzeln [Quadrat], aber die Summe der Quadrate ist rational, also auch jedes einzelne Quadrat[168]). Es sei nun die Summe der Quadrate medial, so sage ich, daß diese einzelnen Quadrate medial sind: denn, weil AB und BG in der Potenz kommensurabel sind, so sind also AB^2 und BG^2 kommensurabel, also auch $AB^2 + BG^2$ kommensurabel zu jedem einzeln [Quadrat], aber die Summe der Quadrate ist medial, also auch AB^2 und BG^2 einzeln medial, weil das Kommensurable zum Rationalen rational und das Kommensurable zum Medialen medial ist, und die Linie, die ein Rationales potenziert, rational, und die, welche ein Mediales potenziert, medial ist[169]). — Die beiden Linien seien nun in der Potenz inkommensurabel, so sage ich, daß, wenn die Summe ihrer Quadrate rational ist, [deswegen] nicht jedes einzelne rational ist, und wenn sie medial ist, sie deswegen nicht einzeln medial sind; denn wenn dies möglich wäre, so seien nun also [erstens] AB^2 und BG^2 rational (s. vor. Fig.); man lege an eine rationale Linie (S. 38) EZ ein Rechteck (Fläche) an gleich der Summe der Quadrate von AB und BG, es sei EM, und schneide davon das Rechteck $EK = AB^2$ ab, also ist der Rest $TM = BG^2$; weil nun AB^2 inkommensurabel zu BG^2 ist, da AB und BG [nach Vorauss.] in der Potenz inkommensurabel sind, so ist klar, daß EK zu TM inkommensurabel ist, also ist auch die Linie ET in der Länge inkommensurabel zu TL, weil aber AB^2 und BG^2 rational sind [wie angenommen wurde], so sind auch die Flächen EK und TM rational, sie wurden aber angelegt an die rationale Linie EZ, also sind auch die Linien ET und TL rational, in der Potenz kommensurabel; weil nun Fläche EK inkommensurabel zu TM ist, so muß Linie ET



167) Der Text hat unrichtig „die beiden Linien", was noch einigemale vorkommt.

168) Ein noch folgender Schlußsatz „also sind auch AB und BG rational, kommensurabel in der Potenz" ist unnötig.

169) Der Satz „weil das Kommensurable . . . medial ist" wäre durchaus nicht notwendig, da dies schon mehrmals gesagt worden ist. Vergl. auch Anhang Nr. 15.

inkommensurabel in der Länge zu TL sein, also ist EL ein Binomium, also irrational; aber Fläche EM ist rational, weil sie gleich $AB^2 + BG^2$ ist, und dieses rational angenommen wurde, sie wurde aber an die rationale Linie EZ angelegt, also ist auch Linie EL rational, sie wäre also zugleich rational und und irrational, was unmöglich ist[170]), also sind die Quadrate von AB und BG nicht rational. — Es sei nun [zweitens] die Summe der Quadrate von AB und BG, die also in der Potenz inkommensurabel sind, medial, so sage ich, daß AB^2 und BG^2 einzeln nicht medial sind. Denn wenn dies möglich wäre, so seien also AB^2 und BG^2 medial, wir nehmen wieder die rationale Linie EZ an, [und legen an sie eine Fläche an gleich der Summe der Quadrate von AB und GB, sie sei EM, und schneiden davon das Rechteck $EK = AB^2$ ab, also ist der Rest $TM = BG^2$; weil nun AB^2 inkommensurabel zu BG^2 ist, so ist also auch EK zu TM inkommensurabel, weil aber AB^2 und BG^2 medial sind nach Annahme], so sind also auch die Flächen EK und TM medial, dann ist jede der Linien ET, TL rational, nur in der Potenz kommensurabel [zu EZ][171]), also ist EL ein Binomium, also irrational, es ist aber auch rational, denn $AB^2 + BG^2$ ist medial (nach Vorauss.), und diese Summe wurde an die rationale Linie EZ angelegt, also muß eine rationale, zu EZ in der Potenz kommensurable Breite entstehen [EL wäre also zugleich rational und irrational, was nicht möglich ist], also sind AB^2 und BG^2 nicht medial. Es wurde also bewiesen, daß, wenn zwei in der Potenz inkommensurable Linien gegeben sind und die Summe ihrer Quadrate rational oder medial ist, die Quadrate einzeln dann nicht rational oder medial sind[172]). — Und nachdem nun Euklides bewiesen hat, daß dieses bei den in der Potenz kommensurabeln Linien richtig ist, nicht aber bei den in der Potenz inkommensurabeln Linien[173]), nennt er jene in der Potenz kommensurabeln rational oder medial, diese aber nennt er nicht [so] sondern er nennt sie allgemein in der Potenz inkommensurable [gerade Linien][174]).

Weil nun die Einteilung von Anfang an nur darin besteht, daß er (S. 39) Linien annimmt, die in der Potenz kommensurabel sind, und solche, die in der Potenz inkommensurabel sind, so leitet er aus ihnen [auch nur auf diese Einteilung gestützt?] die [sechs] Irrationallinien ab, durch Zusammensetzung von rationalen und medialen und von inkommensurabeln medialen Rechtecken, weil diese zwei Arten von Rechtecken notwendig aus den rationalen [Linien] entstehen; denn wenn die Linien die die Flächen (Rechtecke) bilden, rational sind, so sind sie entweder in der Länge [kommensurabel], dann ist die von ihnen gebildete Fläche rational, oder sie sind so in der Potenz, dann ist die aus ihnen gebildete Fläche medial; deswegen also gehen die sechs Irrationallinien, die durch

170) Der Satz „was unmöglich ist" fehlt im Text.

171) Denn zwei rationale nur in der Potenz kommensurable Linien bilden ein mediales Rechteck.

172) Vergl. Anhang Nr. 16. — Es scheint also, daß Pappus in dieser S. 37 und 38 gegebenen Auseinandersetzung einen andern Einteilungsmodus für die Irrationallinien der ersten Hexade aufzustellen versucht, als ihn Euklides durchgeführt hat.

173) Diesen Satz verstehe ich nicht, denn Euklides beweist ja eben diese Sätze nicht.

174) Denn es sind eben weder rationale noch mediale Linien.



Zusammensetzung entstehen, daraus hervor, daß [nur] rationale Linien diese [verschiedenen] Arten von Flächen bilden[175]). Nun aber wollen wir uns mit dem begnügen, was wir über die durch Addition entstehenden Linien gesagt haben, da ihre Ordnung und ihre Zahl schon aus der Einteilung klar ist (?).

Wir finden nun die sechs Linien, die durch Subtraktion entstehen, aus denen, die durch Addition entstehen, dadurch, daß wir, indem wir jede einzelne der letztern genau beobachten, das Verhältnis (wörtl. „Zustand") des einen Teils zum andern der zusammengesetzten Linie gleich dem Verhältnis einer ganzen Linie zu einem Teil von ihr setzen, der Rest dieser beiden erzeugt eine von diesen sechs [neuen] Irrationallinien: so entsteht also, während die ganze Linie mit dem Teil von ihr das *Binomium* erzeugt, durch die ganze Linie *weniger* dem Teil die Apotome[176]); und ebenso entsteht, während die ganze Linie mit dem Teil die *erste Bimediale* erzeugt, [durch die ganze Linie weniger dem Teil] die *erste Medialapotome*; ähnlich wie die *zweite* Bimediale erzeugt wird, entsteht die zweite *Medialapotome*; ähnlich wie die *Major* entsteht die *Minor*; ähnlich wie die ein *Rationales und Mediales Potenzierende* entsteht die *mit einem Rationalen ein mediales Ganzes Gebende*, und ähnlich wie die *zwei Mediale Potenzierende* entsteht die *mit einem Medialen ein mediales Ganzes Gebende*. Auf diese Weise wird also gezeigt, daß diese sechs neuen Linien aus jenen sechs frühern entstehen und ihnen entsprechen, und daß die durch Subtraktion entstehenden gleichartig zu jenen sind, die durch Addition entstehen: die Apotome also ist gleichartig (S. 40) mit dem Binomium, die erste Medialapotome mit der ersten Bimedialen, u. s. f.[177]).

Es ist nicht notwendig, daß wir bei den irrationalen Linien, die durch Subtraktion entstehen, annehmen, wir hätten sie nur Apotomen (Residua) genannt wegen der Wegnahme eines Teils der Linie von der ganzen, wie wir auch die sechs durch Addition entstandenen Linien nicht mit Rücksicht darauf, daß die beiden Linien zueinander addiert werden, Binomien genannt haben; wir haben sie vielmehr so genannt wegen der verminderten (Subtraktion der) Flächen, [die aus der Potenzierung dieser Linien entstehen] wie wir auch diejenigen Linien, die durch Addition entstehen, so genannt haben wegen der Zusammensetzung der Flächen, die durch ihre Potenzierung entstehen[178]). Es sei z. B. die Linie AB gegeben, sie mache mit BG ein Binomium aus, und es seien die beiden Quadrate über AB und BG zusammen gleich zweimal dem Rechteck aus AB

A G B G'

und BG mehr dem Quadrat über AG, und es sei die Summe der beiden Quadrate [also $AB^2 + BG^2$] rational, und das Rechteck medial, so erhältst du, wenn du von einer rationalen Fläche eine mediale ab-

175) Dieses Alinea ist bis hieher etwas schwer zu verstehen; wir vermuten, daß im Texte Fehler vorliegen.

176) Dies ist nicht deutlich ausgedrückt, vergl. Anhang Nr. 17.

177) Der Kommentar zählt wieder alle sechs Fälle auf, was man uns wohl erlassen wird.

178) Pappus spricht hier und im folgenden mit Unrecht in der ersten Person, es sind dies jedenfalls Fehler des Übersetzers oder der Abschreiber. — Vergl. auch Anhang Nr. 18.

ziehst, eine Fläche, die von einer Apotome potenziert wird, gleicherweise wie, wenn du die rationale und die mediale Fläche addierst und die rationale die größere ist, du das Binomium erhältst[179]). Wenn also von einem Rationalem[180]) ein Mediales[180]) abgezogen wird, so heißt die Linie, die den Rest potenziert, Apotome; aus diesem Grunde also haben wir die Namen Binomium und Apotome angewandt, weil wir dort ein kleineres Mediales mit einem größern Rationalen zusammengesetzt haben und hier von demselben Rationalen dasselbe Mediale abgetrennt haben; dort haben wir diejenige Linie gefunden, die das Ganze potenziert, hier diejenige, die den Rest potenziert. Die Apotome also und das Binomium sind gleichartige Größen, und doch ist die eine von der andern verschieden. — Es seien nun zweitens[181]) die Linien AB und BG [wieder] in der Potenz kommensurabel, die Summe ihrer Quadrate sei medial, ihr Rechteck rational, so ist das Mediale gleich zweimal dem Rationalen mehr dem Quadrat der Differenz [der beiden Linien][182]), und wenn vom Medialen das Rationale abgezogen wird, so ist die Linie, die den Rest (S. 41) potenziert [also AG], die erste Medialapotome; wie wir also die erste Bimediale erhalten haben durch Addition des Medialen und Rationalen und dieses kleiner war als das erstere so sagen wir jetzt, daß die erste Medialapotome die Linie ist, die das Rechteck potenziert, das übrigbleibt, wenn wir das Rationale vom Medialen abziehen. — Drittens seien die Linien AB und BG [wieder] in der Potenz kommensurabel[183]), die Summe der Quadrate sei medial, ihr Rechteck medial[184]), und es sei die Summe der Quadrate größer als das doppelte Rechteck, so daß also $AB^2 + BG^2 = 2\,AB \cdot BG + AG^2$; wenn du nun das eine Mediale vom andern subtrahierst, so heißt die Linie, die den Rest potenziert, die zweite Medialapotome, gleichwie die Linie, die das Rechteck potenziert, das wir aus der Summe der beiden medialen Rechtecke erhalten, die zweite Bimediale genannt worden ist. — Viertens seien die Linien AB und BG in der Potenz inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate rational, ihr Rechteck medial; wenn das doppelte Mediale vom Rationalen abgezogen wird, so bleibt das Quadrat von AG übrig, und die Linie, die dieses Quadrat potenziert, heißt die Minor, gleichwie die Linie, die das Rechteck potenziert, das man aus der Summe des Rationalen und Medialen erhält, die Major genannt wurde[185]). — Fünftens [seien die Linien AB und BG wieder in der Potenz inkommensurabel], die Summe ihrer Quadrate medial, ihr Rechteck rational, und das doppelte Rationale werde vom Medialen abgezogen,

179) D. h. es ist $AG^2 = (AB - BG)^2 = AB^2 + BG^2 - 2AB \,.\, BG$, AG ist also die Apotome; $AG'^2 = (AB + BG')^2 = AB^2 + BG'^2 + 2AB \,.\, BG'$, AG' ist also das Binomium. Im Text steht keine Figur.

180) Wenn die Adjektive „Rational" und „Medial" allein stehen, ist immer ein Rechteck darunter verstanden.

181) Diese Nummerierung fehlt im Text, ich habe sie der Übersichtlichkeit wegen beigefügt.

182) D. h. $AB^2 + BG^2 = 2AB \,.\, BG + AG^2$, oder $(AB - BG)^2 = AG^2$.

183) Statt „in der Potenz kommensurabel" steht irrtümlich „die zweite Bimediale".

184) Es fehlt im Text: „ihrer Quadrate" und „ihr Rechteck medial".

185) Der Text ist hier verdorben, öftere Wiederholungen und Auslassungen kommen vor.



so heißt die Linie, die den Rest potenziert, die mit einem Rationalen ein mediales Ganzes Gebende, weil ihr Quadrat mit (S. 42) dem doppelten Rechteck aus AB und BG zusammen, welches rational ist, gleich der Summe der Quadrate von AB und BG ist, [welche medial ist]. — Sechstens seien die Linien AB und BG wieder in der Potenz inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate medial, ihr Rechteck medial und beide Mediale inkommensurabel; wenn wir das doppelte Rechteck von dem größern medialen, d. h. der Summe der Quadrate, wegnehmen, so heißt die Linie, die den Rest potenziert, nämlich die Linie AG, die mit einem Medialen ein mediales Ganzes Gebende, weil ihr Quadrat mit dem doppelten Rechteck aus AB und BG zusammen gleich der Summe der Quadrate von AB und BG ist, die medial ist.

Wenn also ein rationales Rechteck mit einem medialen oder zwei mediale zusammengesetzt werden, so ist aus dem vorigen klar, daß die Linie, die die Summe der Rechtecke potenziert, nach der Zusammensetzung [dieser Rechtecke] benannt wird, und wenn ein mediales Rechteck von einem rationalen oder ein rationales von einem medialen oder ein mediales von einem medialen abgezogen wird, so ist es ebenso klar, daß die irrationale Linie, die den Rest potenziert, nach der Trennung [dieser Rechtecke] benannt wird. Wir haben also bei diesen Rechtecken nicht rationale von rationalen weggenommen und also nicht rationale Reste bekommen, denn es ist schon bekannt, daß das Rationale Rationales nur um Rationales übertrifft, und daß die Linie, die Rationales potenziert, selbst rational ist. Und weil es nun notwendig ist, daß die Linie, die jeweilen bei der Wegnahme den Rest potenziert, irrational sei, und also ein anderes irrationales Rechteck potenziere, so ist es keineswegs zulässig, daß das von dem rationalen Rechteck weggenommene rational sei, sondern es blieb nur übrig, daß Rationales von Medialem oder Mediales von Rationalem oder Mediales von Medialem weggenommen werde. Nun haben wir, wenn wir Mediales von Rationalem weggenommen haben [und dies ist zweimal geschehen], die beiden Linien, die jeweilen den Rest potenzierten, irrational gefunden [der Text hat „angenommen"], und wenn die das mediale Rechteck bildenden Linien in der Potenz kommensurabel waren, so entstand die Apotome, und wenn sie in der Potenz inkommensurabel waren, so entstand die Minor; wenn wir aber Rationales von Medialem weggenommen haben, so haben wir zwei andere irrationale Linien erhalten, und zwar, wenn die beiden Linien, die das rationale Rechteck bildeten, in Potenz kommensurabel waren, so entstand die erste Medialapotome (S. 43), und wenn sie in der Potenz inkommensurabel waren, so entstand die mit einem Rationalen ein mediales Ganzes Gebende; wenn wir endlich Mediales von Medialem weggenommen haben, so entstanden noch die zwei andern Irrationallinien, und zwar, wenn die beiden Linien, die das abgezogene mediale Rechteck bildeten, kommensurabel in der Potenz waren, entstand die zweite Medialapotome, und wenn sie in der Potenz inkommensurabel waren, entstand die mit einem Medialen ein mediales Ganzes Gebende[186].

186) Es folgt nun noch eine Wiederholung (das Vorhergehende war schon eine solche), die aber durch Lücken des Textes stark verdorben ist, wir lassen sie daher weg.



Wir sagen nun zusammenfassend:[187]) Wenn ein Mediales zusammengesetzt wird mit einem Rationalen, so heißt die Linie, welche das ganze potenziert, Binomium, wird aber das Mediale vom Rationalen weggenommen, so heißt die Linie, welche den Rest potenziert, Apotome; dabei müssen aber die Linien, die das mediale Rechteck bilden, in der Potenz kommensurabel sein. Wenn ein Rationales zusammengesetzt wird mit einem Medialen, so heißt die Linie, die das ganze potenziert, erste Bimediale, wird aber das Rationale vom Medialen weggenommen, so heißt die Linie, die den Rest potenziert, erste Medialapotome, dabei müssen die Linien, die das rationale Rechteck bilden, ebenfalls in der Potenz kommensurabel sein. Wenn ein Mediales mit einem Medialen zusammengesetzt wird, so heißt die Linie, die das ganze potenziert, zweite Bimediale, wird aber das kleinere Mediale vom größern abgezogen, so heißt die Linie, die den Rest potenziert, zweite Medialapotome, dabei müssen die Linien, die das zu subtrahierende Rechteck bilden, in der Potenz ebenfalls kommensurabel sein. Wenn ein Mediales mit einem Rationalen zusammengesetzt wird, so heißt die Linie, die das ganze potenziert, die Major, wird aber das Mediale vom Rationalen weggenommen, so heißt die Linie, die den Rest potenziert, die Minor, dabei müssen aber die Linien, die das mediale Rechteck bilden, in der Potenz inkommensurabel sein. Wenn ein Rationales mit einem Medialen zusammengesetzt wird, so heißt die Linie, die das ganze potenziert, (S. 44) die ein Rationales und Mediales Potenzierende, wird aber das Rationale vom Medialen weggenommen, so heißt die Linie, die den Rest potenziert, die mit einem Rationalen ein mediales Ganzes Gebende, dabei müssen die Linien, die das rationale Rechteck bilden, ebenfalls in der Potenz inkommensurabel sein. Wenn ein Mediales mit einem Medialen zusammengesetzt wird, so heißt die Linie, die das ganze potenziert, die zwei Mediale Potenzierende, wird aber das kleinere Mediale vom größern weggenommen, so heißt die Linie, die den Rest potenziert, die mit einem Medialen ein mediales Ganzes Gebende, dabei müssen die Linien, die das kleinere Rechteck bilden, ebenfalls in der Potenz inkommensurabel sein. — [188]) Die Annahme der Rechtecke kann also eine dreifache sein: ein Rationales verbunden mit einem Medialen, ein Mediales verbunden mit einem Rationalen oder ein Mediales verbunden mit einem Medialen (ein Rationales verbunden mit einem Rationalen kommt nicht vor, wie schon erklärt wurde)[189]). Die Art der Linien, die diese Rechtecke bilden, ist eine zweifache: entweder sind sie in der Potenz kommensurabel oder in der Potenz inkommensurabel (denn es ist nicht möglich, daß sie in Länge kommensurabel seien[189]). Die Art der Verbindung [dieser Linien] unter sich ist ebenfalls eine zweifache: entweder durch Addition oder durch Subtraktion.

Die 12 Irrationallinien unterscheiden sich also voneinander sowohl durch

---

187) Dies ist eine dritte Wiederholung! nur in anderer Zusammenstellung.

188) Hier folgt eine vierte Wiederholung!

189) Der Satz in Klammern steht im Text.



die Art der Annahme[190]) der Rechtecke, indem das eine Mal ein mediales mit einem rationalen zusammengesetzt, das andere Mal ein mediales von einem rationalen abgezogen wird, als auch durch die Annahme der Linien, die jeweilen die kleineren Rechtecke bilden und die größern potenzieren, indem sie das eine Mal in der Potenz kommensurabel, das andere Mal in der Potenz inkommensurabel sind, als endlich durch die Verschiedenheit der Rechtecke, indem das eine Mal ein rationales von einem medialen, das andere Mal ein mediales von einem rationalen [und das dritte Mal ein mediales von einem medialen] abgezogen wird; ferner, indem das eine Mal ein rationales mit einem medialen, das andere Mal ein mediales mit einem rationalen [und das dritte Mal ein mediales mit einem medialen] zusammengesetzt wird, und das erste Mal das rationale das kleinere, das zweite Mal das mediale das kleinere ist[191]). Ebenso unterscheiden sich alle durch Addition entstandenen Irrationallinien von denen, die durch Subtraktion entstanden sind, und zwar erstens in Hinsicht der Linien, die die Rechtecke bilden, in dieser nämlich unterscheiden sich die drei ersten, die durch Zusammensetzung sowohl als durch Trennung entstehen, von den drei letzten[192]), und zweitens in Hinsicht auf die Verschiedenheit der Rechtecke, in dieser nämlich unterscheiden sich ebenfalls drei (S. 45) von den drei andern. Das ist die Euklidische Art der Einteilung und Anordnung der Irrationallinien.

Wenn diejenigen, die diesen Dingen [über Irrationallinien] folgen, behaupten, daß Theätetus der Athener zwei in der Potenz kommensurable Linien annahm und bewies, daß, wenn er zwischen denselben die mittlere geometrische Proportionale bestimmte, dann die Linie entstand, die Mediallinie genannt wird, wenn er aber zwischen denselben das harmonische Mittel nahm, dann die Apotome entstand[193]), so können wir dieser Behauptung zustimmen, da wirklich Theätetus dies gesagt hat; wir können aber diesem noch hinzufügen, daß das geometrische Mittel zwischen zwei rationalen, in der Potenz kommensurabeln Linien die Mediallinie ist, und daß durch das arithmetische Mittel j e d e der Linien entsteht, die durch Zusammensetzung gebildet werden, und durch das harmonische Mittel j e d e der Linien, die durch Subtraktion gebildet werden. Also können durch die drei Mittel alle Irrationallinien entstehen; Euklides gab dafür einen klaren Beweis, aber nur für den Fall des geometrischen Mittels, d. h. der Mediallinie[194]). Was die andern Irrationallinien anbetrifft, so werden wir für dieselben die übrigen Proportionalitäten (Mittel) nachweisen: Wir nehmen zwei gerade Linien an, sie seien

190) Besser wäre hier wohl „durch die Art der Verbindung untereinander".

191) Nach unserer Ansicht ist bei dieser dritten Unterscheidungsweise auch wieder die erste hineingezogen worden, der Text ist hier wohl etwas verdorben.

192) Was er mit dieser Unterscheidungsweise meint, ist unklar: die drei ersten Linien unterscheiden sich von den drei letzten in Hinsicht der Linien dadurch, daß diese bei den drei ersten in der Potenz kommensurabel, bei den drei letzten in der Potenz inkommensurabel sind, und dies wurde schon in der zweiten Unterscheidungsweise gesagt.

193) Hier ist das arithmetische Mittel, durch welches das Binomium entsteht, durch Versehen weggelassen.

194) Satz 21.



a und b, und die Linie, die das arithmetische Mittel zwischen ihnen ist, sei g, dann ist die Hälfte der Summe der Linien a und b die Linie g, weil dies die Eigenschaft der [stetigen] arithmetischen Proportion ist; wenn nun die Linien a und b rational und in der Potenz kommensurabel sind, so ist die Linie g ein B i n o m i u m, weil, wenn jene addiert werden, diese Summe das Doppelte von g ist, dieses Doppelte ist aber ein Binomium, also ist auch die Hälfte g ein Binomium. — Wenn aber die Linien a und b Mediallinien sind, kommensurabel in der Potenz, und ein rationales Rechteck bilden, so ist die aus ihnen zusammengesetzte, d. h. das doppelte g, eine e r s t e B i m e d i a l e, also auch ihre Hälfte g von der gleichen Art. — Wenn ferner die beiden Linien a und b Mediallinien sind, (S. 46) kommensurabel in der Potenz, und ein mediales Rechteck bilden, so ist die aus ihnen zusammengesetzte, d. h. das doppelte g eine z w e i t e B i m e d i a l e, also auch g von der gleichen Art[195]). — Wenn aber die beiden Linien a und b in der Potenz inkommensurabel sind und die Summe ihrer Quadrate rational, ihr Rechteck medial ist, so ist ihre Summe, also auch g, irrational und heißt M a j o r. — Wenn die zwei Linien wieder in der Potenz inkommensurabel sind und die Summe ihrer Quadrate medial, ihr Rechteck rational ist, so wird ihre Summe, also auch g, die e i n R a t i o n a l e s u n d M e d i a l e s P o t e n z i e r e n d e sein. — Wenn endlich die Linien wieder in der Potenz inkommensurabel sind und die Summe ihrer Quadrate und ihr Rechteck medial ist, so wird ihre Summe, also auch g, d i e z w e i M e d i a l e P o t e n z i e r e n d e s e i n. So entstehen also durch das arithmetische Mittel alle durch Addition gebildeten Irrationallinien[196]).

Wir müssen (S. 47, Z. 8) nun nach diesem die Irrationallinien betrachten, die durch Subtraktion gebildet werden, wie sie sich aus dem harmonischen Mittel ergeben; wir schicken aber voraus, daß die Eigenschaft der harmonischen [stetigen] Proportion die ist, daß bei ihr das Rechteck aus dem Mittel und der Summe der beiden äußern Größen gleich dem doppelten Rechteck der beiden äußern Größen ist[197]); ferner, daß, wenn zwei gerade Linien ein rationales oder mediales Rechteck bilden und eine der beiden Linien eine der durch Addition entstandenen Irrationallinien ist, dann die andere die ihr entsprechende der durch Subtraktion entstandenen Irrationallinien ist[198]), z. B. wenn die eine der beiden Linien, die das Rechteck bilden, ein Binomium ist, so ist die andere eine Apotome, und wenn die eine eine erste Bimediale ist, so ist die andere eine erste Medialapotome u. s. f.[199]).

---

195) Ich gebe diese Beweise etwas kürzer als der Text.

196) Es werden nun im folgenden Alinea des Textes (S. 46, Z. 14 — S. 47, Z. 7) nochmals die obigen sechs Fälle zusammengestellt; man erlasse uns diese Wiederholungen, die uns fast irre machen könnten an der Autorschaft des Pappus, wenn nicht die Möglichkeit vorhanden wäre, daß der arab. Übersetzer schuld an dieser Weitschweifigkeit sein könnte.

197) D. h. also, wenn x das harmonische Mittel zwischen a und d ist, so ist $x(a + d) = 2ad$.

198) Dieser Satz sollte hier bewiesen werden, der Beweis folgt aber erst weiter unten (siehe Seite 53).

199) So ist es für alle sechs Fälle durchgeführt, wir begnügen uns mit zweien.

Nachdem wir nun dies vorausgeschickt haben, so nehmen wir nun zwei gerade Linien AB und BG an, und es sei das harmonische Mittel zwischen denselben die Linie BD, und es seien die beiden Linien AB und B G rational, in der Potenz kommensurabel, so ist ihr Rechteck medial, (S. 48) also auch das Doppelte, aber dieses doppelte Rechteck ist gleich dem Rechteck aus AB und BD mehr dem Rechteck aus BG und BD[200]), also ist dieses zusammengesetzte Rechteck auch medial, aber dieses zusammengesetzte Rechteck ist gleich dem Rechteck AG · BD, also ist auch dieses medial, es ist aber aus zwei Linien gebildet, von denen die eine AG ein Binomium ist, also ist die andere BD eine Apotome. — Wenn ferner die Linien AB und BG medial, in der Potenz kommensurabel sind und ein rationales Rechteck bilden, und wir machen dasselbe wie vorher, so ist das Rechteck, das von den beiden Linien AG und BD gebildet ist, rational, es ist aber AG eine erste Bimediale, also ist BD eine erste Medialapotome. — Wenn ferner die Linien AB und BG medial und in der Potenz kommensurabel sind und ein mediales Rechteck bilden, so ist aus denselben Gründen wie vorher auch das Rechteck aus AG und BD medial, AG ist aber eine zweite Bimediale, also ist BD eine zweite Medialapotome. — Sind ferner die Linien AB und BG in der Potenz inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate rational, ihr Rechteck medial, so ist auch das Rechteck aus AG und BD medial, aber AG ist eine Major, also ist BD eine Minor. — Sind die Linien AB und BG in der Potenz inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate medial, ihr Rechteck rational, so ist auch das Rechteck aus AG und BD rational, aber AG ist eine ein Rationales und Mediales Potenzierende, also BD eine mit einem Rationalen ein mediales Ganzes Gebende. — Sind endlich die Linien AB und BG in der Potenz inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate und ihr Rechteck medial, so ist das Rechteck aus AG und BD auch medial, aber AG ist eine zwei Mediale Potenzierende, also ist BD eine mit einem Medialen ein mediales Ganzes Gebende. — Also das arithmetische Mittel, das von zwei solchen Linien genommen wird, erzeugt eine der Irrationallinien, die durch Addition entstehen, und das harmonische Mittel eine der Irrationallinien, die durch Subtraktion entstehen, und zwar die entsprechende zu jener[201]).

Also das geometrische Mittel gab uns die (S. 49, Z. 10) erste der Irrationallinien, die Mediale, das arithmetische Mittel gab uns alle sechs durch Addition gebildeten Linien, und das harmonische Mittel alle sechs durch Subtraktion ge-

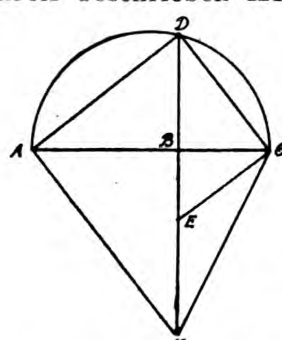
200) Also gleich (AB + BG) . BD nach der oben gegebenen Eigenschaft der stetigen harmonischen Proportion.

201) Allerdings sind die beiden Teile der entsprechenden Linie, die durch Subtraktion entsteht, nicht ganz die gleichen wie diejenigen der Linie, die durch Addition entsteht, aber doch von derselben Art; vergl. dazu Anhang Nr. 19. — Im folgenden (S. 48, letzte Z. — S. 49, Z. 10) wird nun nochmals eine Zusammenstellung dieser sechs Fälle wiederholt, wir lassen dieses wie oben weg.



bildeten Linien. Aus diesen Dingen wird uns nun klar, daß Theätetus mit seinem Ausspruche recht hatte, denn das geometrische Mittel zwischen zwei rationalen, in der Potenz kommensurabeln Linien ist die Mediallinie, das arithmetische Mittel ist das Binomium, und das harmonische Mittel ist die Apotome [202]). Dies ist alles, was von meiner Seite über die 13 Irrationallinien zur Festsetzung ihrer Einteilung und Anordnung und ihrer Beziehungen zu den drei Medietäten (Mittel), mit welchen sich die Alten vielfach beschäftigt haben, zu sagen war.

Was nun den Satz betrifft, daß, wenn eine der Linien, die ein rationales oder mediales Rechteck bilden, eine der durch Addition entstandenen Linien ist, dann die andere die ihr entsprechende der durch Subtraktion gebildeten Linien sein muß, (S. 50) so ist es notwendig, daß wir dieses beweisen, nachdem wir zuerst folgenden Satz vorausgeschickt haben: Es seien AB und BG zwei ein rationales Rechteck bildende Linien und AB die größere, über AG sei ein Halbkreis beschrieben ADG, wir ziehen BD senkrecht auf AG, so ist BD ebenfalls rational, da es mittlere Proportionale zwischen AB und BG ist; nachdem wir die Linien AD und GD gezogen haben, so ist D ein rechter Winkel als Winkel im Halbkreis, wir ziehen ferner zu AD die Senkrechte AZ, wir verlängern DB, bis es AZ im Punkte Z trifft, ziehen dann in G eine Senkrechte auf DG, so sagen wir, sie treffe DZ nicht im Punkte Z, noch außerhalb desselben, sondern sie treffe sie zwischen B und Z; denn wenn es möglich wäre, sie träfe DZ im Punkte Z, dann wäre DAZG ein Rechteck, weil alle Winkel rechte wären, es ist nun $DA > DG$, also müßte auch $GZ > AZ$ sein, weil im Rechteck zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich sind, dann wäre also auch $GB^2 + BZ^2 > AB^2 + BZ^2$, also auch $GB > AB$, dies steht im Widerspruch mit der Voraussetzung. Besser wäre folgender Beweis: Weil die Winkel bei A und G rechte sind und die beiden Linien AB und BG senkrecht auf DZ [203]) sind, so wäre $DB \cdot BZ = BG^2$, es ist aber auch $= AB^2$, also wäre $BG = AB$, was gegen die Voraussetzung ist. Auf ähnliche Weise zeigen wir, daß GE die BZ nicht außerhalb Z trifft, sie treffe also BZ im Punkte E, dann sage ich, daß $BZ \cdot BE = DB^2 =$ rational sei; denn DGE ist rechtwinklig, und GB ist senkrecht auf DE [204]), also sind die beiden Dreiecke GBE und GBD [205]) (S. 51) ähnlich, aber GBD ist auch ähnlich ABZ, also auch GBE ähnlich ABZ [206]), also hat man die Proportion: $BZ : AB = BG : BE$, mithin $BZ \cdot BE = AB \cdot BG = DB^2$, also $BZ \cdot BE$ rational.



202) Wahrscheinlich dehnte also Theätetus diese Untersuchungen nicht weiter aus, d. h. nicht auf die fünf (bezw. 10) übrigen Arten dieser Irrationallinien.

203) „auf DZ" fehlt im Text.

204) „auf DE" fehlt im Text.

205) „GBE und GBD" fehlt im Text.

206) Dieser Ähnlichkeitsbeweis wird nochmals sehr weitschweifig mit Anführung aller Winkel wiederholt.

Nachdem wir nun dies vorausgeschickt haben, wollen wir nun die Sätze beweisen, welche wir uns vorgenommen haben: Es bilden die Linien AB und BG ein rationales Rechteck; nun hat schon Euklides bewiesen, daß, wenn ein rationales Rechteck an ein Binomium angelegt wird, dann seine Breite eine Apotome sei und von gleicher Ordnung wie jenes[207]). Ist also die Linie AB ein Binomium, so ist BG eine Apotome; ist aber jene eine erste Binomiale, so ist die andere eine erste Apotome[208]); ist die eine eine zweite Binomiale, so ist die andere eine zweite Apotome, ist die eine eine dritte Binomiale, so ist die andere eine dritte Apotome, und so bei den übrigen drei Fällen. — Es sei nun aber die Linie AB eine erste Bimediale[209]), so zeigen wir mit Hilfe des Vorausgegangenen, daß BG eine erste Medialapotome ist: Es ist nämlich[210]) BZ eine zweite Binomiale, denn die Breite, die entsteht, wenn das Quadrat einer ersten Bimedialen an eine rationale Linie angelegt wird, ist eine zweite Binomiale[211]); und weil nun das Rechteck aus BZ und BE rational ist, so ist die Linie BE die zweite Apotome, weil ein rationales Rechteck, wenn es an eine zweite Binomiale angelegt wird, als Breite eine zweite Apotome ergibt; also ist BG eine erste Medialapotome, weil die Linie, die ein Rechteck potenziert, dessen eine Seite rational und dessen andere eine zweite Apotome ist, eine erste Medialapotome ist[212]). — Es sei nun AB eine zweite Bimediale und bilde mit BG ein rationales Rechteck (S. 52), so sage ich, daß BG eine zweite Medialapotome ist. Aus derselben Figur folgt wieder, weil AB eine zweite Bimediale und BD rational ist, daß BZ eine dritte Binomiale ist, denn das Quadrat einer zweiten Bimedialen, angelegt an eine rationale Linie, erzeugt als Breite eine dritte Binomiale, und weil das Rechteck BZ · BE rational ist, so ist BE eine dritte Apotome, weil, wenn zwei Linien ein rationales Rechteck bilden und die eine eine Binomiale ist, die andere die [entsprechende] Apotome ist, nun ist BZ eine dritte Binomiale, also ist BE eine dritte Apotome; aber BD ist rational, und das Rechteck (BD · BE), gebildet von einer rationalen Linie und einer dritten Apotome, wird potenziert durch eine zweite Medialapotome, also ist BG eine zweite Medialapotome, denn $BD \cdot BE = BG^2$. — Es sei nun AB eine Major, so sage ich, daß BG eine Minor ist. Nach derselben Figur ist wieder, weil AB eine Major und BD rational ist, BZ eine vierte Binomiale, denn das Quadrat einer Major, angelegt an eine rationale Linie, erzeugt als Breite eine vierte Binomiale; aber das Rechteck

---

207) Satz 112 und Umkehrung dazu 113; Pappus hat also im Gegensatz zu Heiberg diese Sätze dem Euklides zugeschrieben.

208) Diesen und die folgenden Sätze wurden von Euklides nicht mehr bewiesen, auch Pappus beweist sie also nicht, sondern folgert sie als selbstverständlich aus Satz 112.

209) Für diese und die folgenden Linien muß nun Pappus die Beweise geben, da sie weder von Euklides gegeben worden sind, noch sich auf Satz 112 zurückführen lassen.

210) Die Worte „BG ein erste . . . . nämlich“ fehlen im Text.

211) Nach unserer Auffassungsweise: wenn eine erste Bimediale quadriert wird, so entsteht eine zweite Binomiale (Satz 61).

212) Der Schluß dieses Beweises ist etwas kurz, s. Anhang Nr. 20.



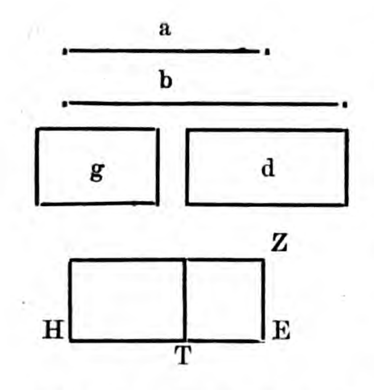
BZ · BE ist rational, also ist BE eine vierte Apotome, weil BZ eine vierte Binomiale ist[213]); weil nun BD rational und BE eine vierte Apotome ist, so ist BG eine Minor, denn das Rechteck, gebildet aus einer rationalen Linie und einer vierten Apotome, wird potenziert durch eine Minor. — Es sei nun AB eine ein Rationales und Mediales Potenzierende, so sage ich, daß BG eine mit einem Rationalen ein mediales Ganzes Gebende ist. Da BD rational, so ist BZ eine fünfte Binomiale, denn das Quadrat einer ein Rationales und Mediales Potenzierenden, angelegt an eine rationale Linie, erzeugt als Breite eine fünfte Binomiale; (S. 53) weil aber das Rechteck BZ · BE rational ist, ist BE eine fünfte Apotome, weil nun BD rational, so ist BG eine mit einem Rationalen ein mediales Ganzes Gebende, denn das Rechteck, gebildet aus einer rationalen Linie und einer fünften Apotome, wird potenziert durch eine mit einem Rationalen ein mediales Ganzes Gebende. — Endlich sei AB eine zwei Mediale Potenzierende, so sage ich, daß BG eine mit einem Medialen ein mediales Ganzes Gebende sei. Aus derselben Figur folgt wieder, da BD rational ist, daß BZ eine sechste Binomiale ist; weil aber das Rechteck BZ · BE rational ist, so ist BE eine sechste Apotome; aber BD ist rational, also ist BG eine mit einem Medialen ein mediales Ganzes Gebende, denn das Rechteck, gebildet aus einer rationalen Linie und einer sechsten Apotome, ist eine mit einem Medialen ein mediales Ganzes Gebende[214]). — Wenn also irgend ein rationales Rechteck gegeben ist, dessen eine Seite gleich einer der Irrationallinien ist, die durch Addition gebildet werden, so ist die andere Seite gleich der entsprechenden Irrationallinie, die durch Subtraktion gebildet wird. Diese Sache wird nun aus dem, was wir hier dargelegt haben, klar sein.

Was nun den Fall anbetrifft, daß, wenn zwei gerade Linien ein mediales Rechteck bilden und die eine von ihnen eine der Irrationallinien ist, die durch Addition entstehen, dann die andere die entsprechende Irrationallinie ist, die durch Subtraktion entsteht, so wird derselbe durch folgende Betrachtungen (Text: „Dinge“) klar werden. Wir schicken zuerst folgenden Satz voraus: Wenn zwei gerade Linien gegeben sind, die sich wie ein rationales Rechteck zu einem medialen oder wie ein mediales zu einem medialen verhalten, und diese Rechtecke seien inkommensurabel, so sind die beiden geraden Linien in der Potenz kommensurabel. Wir nehmen [zum Beweise] an, die Linie a verhalte sich zu b wie das Rechteck g zum Rechteck d, und es sei eines von diesen rational und das andere medial oder beide medial, und sie seien in beiden Fällen inkommensurabel; wir nahmen ferner die gerade Linie EZ rational an und legen an sie eine Fläche = g an, sie sei ZT, und ebenso eine Fläche = d, sie sei ZH, so sind die Linien ET und EH rational, in der Potenz kommensurabel, da die beiden an die rationale Linie [EZ] angelegten Rechtecke rational (S. 54)

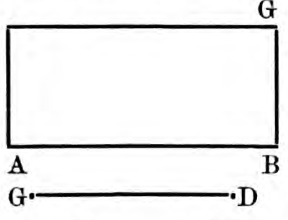
213) Dieses wird wieder ziemlich weitläufig begründet.

214) Dieses ist im Text eigentümlicherweise etwas anders begründet als vorher, ich habe aber denselben Beweisgang beibehalten.





bezw. medial oder beide medial und unter sich inkommensurabel sind; weil nun die Proportion besteht: ET : EH = ZT : ZH = g : d, und ebenso g : d = a : b, so ist auch ET : EH = a : b, aber ET und EH sind in der Potenz kommensurabel, also auch a und b, w. z. b. w. — Da dieses nun vorausgeschickt ist, so beginnen wir jetzt mit dem, was wir zu beweisen beabsichtigen[215]): Es seien die beiden gegebenen Linien AB und GD, sie bilden ein mediales Rechteck, die eine AB sei eine der [irrationalen] Linien, die durch Addition gebildet werden, so sage ich, daß GD die entsprechende der Linien ist, die durch Subtraktion gebildet werden. Wir legen an AB eine rationale Fläche an, es sei die, welche von den Linien AB und BG gebildet wird, dann



ist die Linie BG nach dem, was in dem vorhergehenden Satze[216]) bewiesen wurde, die entsprechende zu AB von den Linien, die durch Subtraktion gebildet werden; weil nun das Rechteck AB · GD medial ist und AB · BG rational, so ist das Verhältnis BG : GD gleich dem Verhältnis eines rationalen zu einem medialen Rechteck, also sind BG und GD in der Potenz kommensurabel, wie eben bewiesen wurde[217]), und deshalb ist GD genau dasselbe wie BG[218]), welche von den Irrationallinien, die durch Subtraktion entstehen, auch BG sei, und zwar weil die Flächen, die sie (BG und GD) potenzieren, kommensurabel sind. — Wenn also zwei gerade Linien ein rationales oder mediales Rechteck bilden und eine derselben eine der Irrationallinien ist, die durch Addition entstehen, so ist die andere die jener entsprechende von den Linien, die durch Subtraktion gebildet werden[219]). Da dieses nun bewiesen ist, so ist also klar, daß mit Hilfe der harmonischen Proportion alle irrationalen Linien, die durch Subtraktion entstehen, (S. 55) aus denen abgeleitet werden können, die durch Addition entstehen, und zwar auf die Weise, die wir oben dargestellt haben, und wo wir nichts Unbewiesenes vorausgesetzt haben.

Dem, was wir nun gesagt haben, lassen wir noch etwas weniges folgen über den Unterschied zwischen den Binomialen und Apotomen, und dies ist folgendes: Die Binomialen sind in sechs Arten unterschieden worden, und ebenso die Apotomen, und dieses ist aus folgenden Gründen erklärlich: Bei den Binomialen mußte ein größerer und ein kleinerer Teil angenommen werden, dann ist es auch selbstverständlich, daß die größere Linie in der Potenz größer sei als die kleinere, und zwar entweder um etwas, das mit ihr [der größern] kommensurabel ist, oder

215) Hier wird der Lehrsatz nochmals wiederholt.

216) Im vorangegangenen Hauptsatz, nicht Hilfssatz.

217) Im vorausgeschickten Hilfssatz.

218) Dies ist nicht deutlich, es ist damit gemeint: „von gleicher Art (Ordnung)".

219) Die von mir beigefügte Figur steht nicht im Text. Vergl. auch Anhang 21.



um etwas, was mit ihr inkommensurabel ist. Und wenn sie [die größere] in der Potenz größer ist als die kleinere um etwas, was mit ihr [der größern] kommensurabel ist, so kann entweder die größere kommensurabel zur angenommenen rationalen Linie sein (d. h. also rational) oder die kleinere oder keine von beiden; denn es ist nicht möglich, daß beide kommensurabel zu ihr seien, weil in diesem Falle sie zueinander kommensurabel wären, und dies ist unmöglich. Und wenn die größere in der Potenz größer ist als die kleinere um etwas, was mit ihr [der größern] inkommensurabel ist, so ist es ebenfalls möglich, daß entweder die größere mit der angenommenen rationalen Linie kommensurabel (also rational) sei oder die kleinere oder keine von beiden, denn es ist nicht möglich, daß beide zu ihr kommensurabel seien aus demselben Grunde wie vorher. So entstehen also drei Binomiallinien, bei denen der größere Teil in der Potenz größer ist als der kleinere, und zwar um etwas, was mit ihm [dem größern Teil] kommensurabel ist, und drei, bei denen der größere Teil in der Potenz größer ist als der kleinere, und zwar um etwas, was mit ihm inkommensurabel ist[220]). — Ebenso verhält es sich bei den Apotomen, von denen wir sagen, daß das Verhältnis der ganzen Linie zu einem ihrer Teile gleich sei dem Verhältnis [der Teile] der Binomialen, wenn der eine [kleinere] Teil von den Teilen der ganzen Linie das abgeschnittene Stück ist; es ist also auch hier durchaus notwendig, daß die ganze Linie in der Potenz größer sei als der andere Teil[221]), und zwar entweder um etwas, was mit ihr [der ganzen Linie] kommensurabel ist, oder um etwas, was mit ihr inkommensurabel ist, und daß in beiden Fällen wiederum entweder die ganze Linie kommensurabel mit der angenommenen rationalen Linie sei oder der kleinere [weggenommene] Teil (S. 56) oder keines von beiden; denn es ist nicht möglich, daß beide kommensurabel zu ihr seien. Es ist also ebenfalls wie bei den Binomialen durchaus notwendig, daß auch bei den Apotomen sechs Arten unterschieden werden, die genannt werden: erste, zweite bis sechste Apotome.

Aber diese sechs Binomialen und Apotomen erwähnt er nur deshalb (stellt er nur deshalb auf), damit er die unterscheidenden Eigenschaften der [vorher behandelten] Irrationallinien, die durch Addition und durch Subtraktion entstehen, noch gründlicher untersuchen könne[222]). Ihre wechselseitigen Beziehungen findet er nämlich auf zwei Arten: das eine Mal gemäß der Bedeutung ihres Wesens[223]), das andere Mal gemäß der Flächen, die sie potenzieren. Z. B. das Binomium stimmt nicht überein mit der ersten Bimedialen im Wesen; denn das erstere ist aus zwei rationalen, in der Potenz kommensurabeln Linien, die zweite

---

220) Dies wird auch so ausgedrückt: Die größere potenziert über die kleinere um das Quadrat einer der größern in Länge kommensurabeln (bezw. inkommensurabeln) Linie; vergl. Biblioth. mathem. 7_3, S. 237.

221) Der von ihr abgeschnitten wird.

222) Dies ist etwas frei übersetzt, die Satzkonstruktion des Textes ist schwierig und wahrscheinlich verdorben.

223) D. h. einfach „gemäß ihrer Definition".



aus zwei medialen, in der Potenz kommensurabeln Linien zusammengesetzt, und die ersten beiden Linien bilden ein mediales, die letzten beiden ein rationales Rechteck; sie stimmen aber auch nicht in den Breiten, die entstehen, wenn die Flächen, die sie potenzieren, an eine rationale Linie angelegt werden; denn jenes [das Binomium] erzeugt [als Breite] die erste Binomiale, diese [die erste Bimediale] erzeugt die zweite Binomiale; ebenso erzeugt die zweite Bimediale die dritte Binomiale, die Major erzeugt die vierte Binomiale, die ein Rationales und Mediales Potenzierende erzeugt die fünfte, und die zwei Mediale Potenzierende erzeugt die sechste Binomiale [224]). Die Anzahl der Binomialen ist also gleich der Anzahl der Irrationallinien, die durch Addition entstanden sind, jede der beiden Klassen zählt also sechs Linien, und die sechs Binomialen entstehen also als Breiten bei der Anlegung der Flächen, die jene [die sechs Irrationallinien, die durch Addition entstehen,] potenzieren, an eine rationale Linie in der angegebenen Ordnung: die erste aus der ersten, die zweite aus der zweiten u. s. f., sodaß also die sechste Binomiale die Breite der Fläche ist, die aus der Anlegung des Quadrates der zwei Mediale Potenzierenden an eine rationale Linie erhalten wird — Auf dieselbe Weise werden auch die gegenseitigen Beziehungen der sechs Apotomen zu den sechs Irrationallinien, die durch Subtraktion entstehen, klargelegt [225]).

Es ist passend (oder notwendig) (S. 57, Z. 14), daß wir zu dem Gesagten noch folgendes hinzufügen: Wenn also das Quadrat irgend einer der sechs Linien, die durch Addition entstehen, an die rationale Linie angelegt wird, so ist die dadurch entstehende Breite eine der sechs Binomialen, und wenn das Quadrat irgend einer der sechs Linien, die durch Subtraktion entstehen, an die rationale Linie angelegt wird, so ist die dadurch entstehende Breite eine der sechs Apotomen. Wenn aber nun dieselben Quadrate nicht an eine rationale, sondern an eine mediale Linie angelegt werden, so wird klar sein, daß dann die Breiten bei den Linien, die durch Addition entstehen, eine erste oder zweite Binomiale sind, und bei den Linien, die durch Subtraktion entstehen, eine erste oder zweite Medialapotome sind. Es ist aber durchaus notwendig, daß wir dieses beweisen; wir schicken zuerst folgendes voraus: Wenn eine rationale Fläche an eine mediale Linie angelegt wird, (S. 58) so ist die [entstehende] Breite medial. Es sei das Rechteck AG rational, angelegt an die Mediallinie AB, so sage ich, daß AD eine Mediallinie sei; wir zeichnen das Quadrat von AB, [es sei AE], so ist es ebenfalls medial, und sein Verhältnis zum Rechteck AG ist gleich dem Verhältnis eines medialen zu einem rationalen Rechteck; also hat ZA zu AD ebenfalls dieses Verhältnis, mithin sind ZA und AD in der Potenz kommensurabel, aber das Quadrat

D A Z

G B E

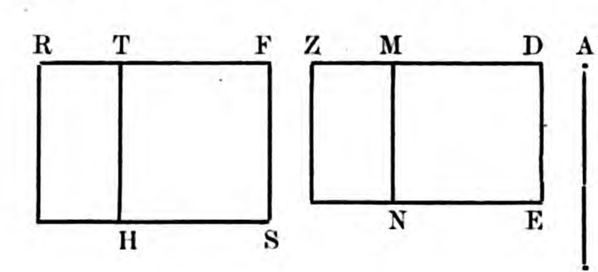
224) Vergl. Anhang Nr. 10.

225) Es wiederholt sich nun fast wörtlich dasselbe, was unmittelbar vorher von den Binomialen und den durch Addition entstehenden Irrationallinien gesagt worden ist, man gestatte mir daher, diesen Abschnitt des Textes (S. 56, Z. 2 v. u. — S. 57, Z. 13) zu übergehen. — Für die Beispiele vergl. Anhang Nr. 12.



von ZA ist medial, weil es das von AB ist, also ist auch das von AD medial, also auch AD selbst medial.

Da wir nun dies vorausgeschickt haben, so sage ich, daß, wenn das Quadrat eines Binomiums oder das Quadrat einer Major an eine Mediallinie angelegt wird, dann die Breite eine erste Bimediale oder eine zweite Bimediale ist. Es sei die Linie AB ein Binomium oder eine Major und die Linie DE eine Mediallinie, und das Rechteck EZ sei gleich dem Quadrat von AB; wir nehmen nun die rationale Linie FS an und legen an sie das Rechteck SR = dem Quadrat von AB an, so ist, wenn AB ein Binomium, FR eine erste Binomiale und, wenn AB eine Major ist, FR die vierte Binomiale; denn dies ist schon bewiesen worden bei der Anlegung der genannten Flächen an eine rationale Linie. Wir teilen nun FR in seine zwei Teile (Namen) im Punkte T, dann ist in jedem der beiden Fälle[226]) FT kommensurabel zur angenommenen rationalen Linie FS, also die Fläche ST rational, die Fläche HR medial, weil die beiden Linien FS und FT in der Länge kommensurabel und TH und TR bloß in der Potenz kommensurabel[227]), aber rational sind; wir schneiden nun [von EZ] das Rechteck EM = Rechteck ST ab, dann ist das übrigbleibende Rechteck NZ = Rechteck HR, weil EZ = SR gesetzt worden ist[228]), also ist das Rechteck NZ auch medial, (S. 59) und EM ist rational, angelegt an die Mediallinie ED, also ist die Linie DM auch eine Mediallinie, wie oben bewiesen wurde; nun ist ED^2 medial, weil ED medial ist, entweder kommensurabel zum Rechteck NZ oder inkommensurabel zu ihm; es sei erstens kommensurabel zu ihm, nun besteht die Proportion $ED^2 : NZ = ED : MZ$, weil Quadrat und Rechteck gemeinsame Höhe haben, also ist ED auch in der Länge kommensurabel zu MZ, mithin ist auch MZ eine Mediallinie, also DM und MZ zwei Mediallinien; ist auch MZ eine Mediallinie, also DM und MZ zwei Mediallinien; ich sage nun, daß das Rechteck aus ihnen rational ist, weil ED kommensurabel zu MZ ist, und die Proportion besteht: $ED : MZ = ED \cdot DM : MZ \cdot DM$, so ist auch $ED \cdot DM$, d. h. Rechteck EM kommensurabel zu $MZ \cdot DM$, aber Rechteck EM ist rational, also ist auch $MZ \cdot DM$ rational, also ist DZ eine erste Bimediale. Es sei nun zweitens ED^2 inkommensurabel zum Rechteck NZ; dann ist das Verhältnis ED : MZ gleich dem Verhältnis einer medialen Fläche zu einer medialen, inkommensurabel zueinander; denn die beiden Flächen ED^2 und NZ haben die gemeinsame Höhe ED, also sind ED und MZ in der Potenz kommensurabel, wie früher bewiesen worden ist, also ist auch MZ^2 medial, also auch MZ selbst,



226) D. h. wenn FR sowohl die erste als die vierte Binomiale ist.

227) D. h. in der Länge inkommensurabel.

228) Nämlich beide = AB^2.



mithin sind beide Linien DM und MZ medial; ich sage nun, daß auch das Rechteck aus ihnen medial ist: Da das Rechteck EM rational und NZ medial ist, so hat man die Proportion: DM : MZ = rationale Fläche: medialer Fläche, also sind DM und MZ kommensurabel in der Potenz, was schon früher bewiesen worden ist; weil aber ED in der Länge inkommensurabel ist zu MZ (S. 60) und Fläche EM inkommensurabel zu Fläche DM · MZ und Fläche EM rational ist, so ist Fläche DM · MZ nicht rational, und die Linien DM und MZ sind medial, in der Potenz kommensurabel, und das Rechteck aus zwei medialen in der Potenz kommensurabeln Linien ist rational oder medial, wie Euklides bewiesen hat [Satz 25], also ist das Rechteck aus DM und MZ, da es [in diesem Falle] nicht rational sein kann, medial, mithin ist DZ eine zweite Bimediale. Wenn also das Quadrat eines Binomiums oder einer Major an eine mediale Linie angelegt wird, so ist die dadurch entstehende[229]) Breite eine erste oder zweite Bimediale[230]).

Es sei nun die Linie AB eine erste Bimediale oder eine ein Rationales und Mediales Potenzierende, und die Linie ED sei eine Mediallinie, und es werde an die Linie ED ein Rechteck angelegt gleich dem Quadrat der Linie AB; es sei ferner FS eine rationale Linie und das [an sie angelegte] Rechteck SR auch gleich dem Quadrat von AB, so ist die Linie FR entweder die zweite Binomiale, wenn AB eine erste Bimediale, oder die fünfte Binomiale, wenn AB die ein Rationales und Mediales Potenzierende ist, [wie früher schon bewiesen worden ist]; FR werde in ihre beiden Teile geteilt im Punkte T, so ist TR in beiden Fällen[231]) kommensurabel zur angenommenen rationalen Linie, und das Rechteck HR rational und das Rechteck ST medial. Wir schneiden nun [vom Rechteck EZ] das Rechteck EM = dem Rechteck ST ab, so ist das Rechteck NZ = dem Rechteck HR, also ist nun auch Rechteck EM medial und Rechteck NZ rational; es wurde aber dieses letztere auch an die mediale Linie ED angelegt, also ist auch MZ eine mediale Linie; weil nun Rechteck EM medial ist und an die mediale Linie ED angelegt wurde, so ist das Quadrat über ED entweder kommensurabel zum Rechteck EM oder inkommensurabel zu ihm. Es sei nun zuerst kommensurabel zu ihm, dann ist auch ED kommensurabel zu DM, also DM ebenfalls medial, und weil MZ kommensurabel zu ED ist in der Potenz und ED kommensurabel in der Länge zu DM, so ist auch MZ in der Potenz kommensurabel zu DM, weil ED kommensurabel in der Länge zu DM ist. Es besteht aber die Proportion (S. 61) ED : DM = ED · MZ : DM · MZ, also sind diese beiden Rechtecke ebenfalls kommensurabel, ED · MZ ist aber rational, weil es gleich dem Rechteck NZ ist, mithin ist auch DM · MZ rational, also ist DZ eine erste Bimediale. — Es sei nun zweitens ED^2 inkommensurabel zum Rechteck EM, dann ist das Verhältnis ED : DM gleich dem Verhältnis eines medialen zu einem medialen Rechteck, die inkommensurabel

229) Der Text hat „seine“.

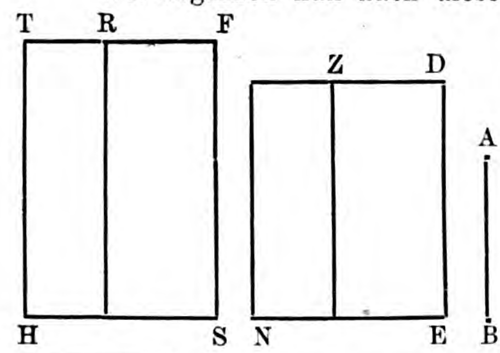
230) Beispiele zu diesem Satze s. Anhang Nr. 22.

231) Ob die ganze Linie die zweite oder fünfte Binomiale sei.

zueinander sind, also sind die Linien ED und DM in der Potenz kommensurabel, das Quadrat über DM ist medial, also DM selbst medial, und auf dieselbe Weise wie vorher wird gezeigt, daß DZ eine zweite Bimediale ist. Wenn also das Quadrat einer ersten Bimedialen oder einer ein Rationales und Mediales Potenzierenden an eine Mediallinie angelegt wird, so ist die dadurch entstehende Breite eine erste oder zweite Bimediale.

Es sei nun endlich die Linie AB eine der noch von den durch Addition entstehenden übrigbleibenden Irrationallinien, also entweder eine zweite Bimediale oder eine zwei Mediale Potenzierende, und ED sei wieder eine Mediallinie und FS wieder rational und die übrigen Dinge genau dieselben [wie in den vorigen Fällen], so ist FR entweder die dritte oder die sechste Binomiale; denn dies sind auch die übrigbleibenden von jenen Linien [der zweiten Hexade], und keine von diesen sei kommensurabel in der Länge zu FS; nun sind die Rechtecke ST und HR medial und inkommensurabel, also sind auch EM und NZ medial, und weil ED medial ist und auch die Linien DM und MZ medial sind, so ist klar, daß eine von diesen kommensurabel zu ED sein wird, weil eines der beiden Rechtecke EM und NZ kommensurabel zum Quadrat von ED ist, also ist auch das Rechteck aus DM und MZ kommensurabel zu einem der beiden Rechtecke [EM und NZ], mithin ist auch das Rechteck aus DM und MZ medial, also ist die Linie DZ eine zweite Bimediale. — Ist aber das Quadrat von ED inkommensurabel zu einem der beiden Rechtecke [EM und NZ], so ist weder DM noch MZ kommensurabel in der Länge zu ED, also ist auch nicht das Rechteck aus DM und MZ kommensurabel zu jedem einzeln von ihnen, es sind also DM und MZ mediale, in der Potenz kommensurable Linien, und das Rechteck aus ihnen kann entweder rational oder medial sein, [mithin ist DZ entweder eine erste oder zweite Bimediale]. Wenn also das Quadrat einer zweiten Bimedialen oder einer zwei Mediale Potenzierenden an eine mediale Linie angelegt wird, so ist die daraus entstehende Breite entweder die erste oder die zweite Bimediale. Also ist nun bewiesen[232] (S. 62), daß das Quadrat jeder der Linien, die durch Addition entstehen, wenn es an eine mediale Linie angelegt wird, als Breite entweder eine erste oder eine zweite Bimediale erzeugt.

Wir beginnen nun nach diesen Irrationallinien auch mit [den Beweisen für] diejenigen, die durch Subtraktion entstehen, indem wir sie zu je zweien [wie vorher] betrachten. Es sei die Linie AB entweder die Apotome oder die Minor und ED eine Mediallinie; wir legen an diese das Rechteck EZ = dem Quadrat von AB an, so sage ich, daß die Linie DZ entweder eine erste Medialapotome oder eine zweite Medialapotome sei. Es



232) Der Beweis des letzten Falles ist freilich nicht ganz einwandfrei ausgefallen; der Text hat jedenfalls verschiedene Lücken.

sei die Linie FS rational, wir legen an sie das Rechteck SR = dem Quadrat von AB an, so ist die Linie FR entweder die erste Apotome, wenn AB die Apotome (absol.) ist[233]), oder die vierte Apotome, wenn AB die Minor ist; es werde nun die Linie RT angesetzt an die Linie FR und zwar so, daß[234]) [FT der Minuend und RT der Subtrahend der ersten oder vierten Apotome wird], dann wird das Rechteck ST (oder HF) vervollständigt und Rechteck NZ = Rechteck HR gemacht; dann hat man die Proportion: Rechteck SR: Rechteck HR = Rechteck EZ: Rechteck NZ, also verhält sich auch FR : TR = DZ : MZ; nun ist das Rechteck ST rational, weil [FT] der [rationale] Minuend der ersten (oder vierten) Apotome ist, also ist FT kommensurabel zur angenommenen rationalen Linie FS, mithin ist das Rechteck aus ihnen rational, also ist auch Rechteck EM rational, da es kommensurabel zu ST ist; und weil die rationale Fläche EM angelegt ist an die Mediallinie ED, ist DM medial, und weil die beiden Linien SF, RT rational, (S. 63) in der Potenz kommensurabel sind, (und zwar weil FR entweder die erste oder vierte Apotome ist)[235]), so ist das Rechteck aus ihnen, also HR medial, mithin Rechteck NZ ebenfalls medial; aber das Quadrat von ED ist auch medial; diese beiden können nun entweder kommensurabel oder inkommensurabel sein. Sie seien nun zuerst kommensurabel, dann ist MZ kommensurabel zu ED, wie schon vorher bewiesen worden ist, also sind die Linien DM und MZ medial; unter den drei Linien ED, DM, MZ besteht nun folgende Beziehung: ED : MZ = ED · DM : MZ · DM, also sind diese beiden Rechtecke ebenfalls kommensurabel, das Rechteck ED · DM aber ist rational, also ist auch MZ · DM rational, mithin ist DZ eine erste Medialapotome. — Ist nun zweitens das Quadrat von ED inkommensurabel zum Rechteck NZ, so ist also MZ nur in der Potenz kommensurabel zu ED; denn ihr Verhältnis zueinander ist gleich dem Verhältnis des medialen ED^2 zu dem mit ihm inkommensurabeln Rechteck NZ, also ist MZ^2 auch medial, also auch MZ selbst, und weil DM in der Potenz kommensurabel zu ED ist und ebenso MZ, so sind auch MZ und DM unter sich in der Potenz kommensurabel, und weil ED inkommensurabel zu MZ in der Länge ist und die Proportion besteht: ED : MZ = Rechteck EM: Rechteck DM · MZ, so sind diese beiden Flächen ebenfalls inkommensurabel, EM ist aber rational, also DM · MZ irrational (medial), mithin die beiden Linien medial, in der Potenz kommensurabel, ihr Rechteck medial, also ist DZ eine zweite Medialapotome. Wenn also das Quadrat einer Apotome oder einer Minor an eine mediale Linie angelegt wird, so entsteht als Breite eine erste oder zweite Medialapotome[236]).

Es sei nun die Linie AB (s. Fig. S. 64) entweder eine erste Medialapotome, oder die mit einem Rationalen ein mediales Ganzes Gebende; ebenso sei

---

233) Der Satz „wenn AB . . . . ist" fehlt im Text.

234) Hier folgt im Text der Satz: „daß die Fläche NZ = der Fläche HR werde"; von der Fläche NZ ist aber noch gar nichts gesagt. das richtige ist, wie ich es oben ergänzt habe.

235) Die Worte in Klammern stehen im Text.

236) Beispiele zu diesem Satze s. Anhang Nr. 23.

ED wieder eine Mediallinie, wir legen an sie ein Rechteck [EZ] an, das gleich AB^2 ist, so sage ich, daß DZ entweder eine erste oder zweite Medialapotome sei. Wir legen an die rationale Linie FS das Rechteck $SR = AB^2$ an, so ist FR entweder die zweite oder fünfte Apotome; es werde nun TR an FR angesetzt, [so daß FT der Minuend und TR der Subtrahend der zweiten oder (S. 64) fünften Apotome werde], man vervollständige das Rechteck ST und mache auch Rechteck NZ = Rechteck HR; weil nun FR entweder die zweite oder fünfte Apotome ist, so ist FT rational, in der Potenz kommensurabel zu der gegebenen rationalen Linie FS und TR in der Länge kommensurabel zu ihr, also das Rechteck HR rational und Rechteck ST medial, weil jenes von zwei rationalen, in der Länge kommensurabeln Linien, dieses von zwei nur in der Potenz kommensurabeln Linien gebildet wird, also ist auch Rechteck NZ rational und EM medial, und weil nun das rationale Rechteck NZ angelegt wurde an die mediale Linie ED, so ist seine Breite MZ medial, in der Potenz kommensurabel zu ED, und wenn nun Rechteck EM und ED^2 medial sind, so sind sie entweder kommensurabel oder inkommensurabel. Sie seien nun z u e r s t kommensurabel, dann ist auch ED in der Länge kommensurabel zu DM, also ist auch diese medial, und weil MZ in der Potenz kommensurabel zu ED ist, so sind auch DM und MZ in der Potenz kommensurabel, und weil die Proportion besteht: $ED : DM = ED . MZ : DM . MZ$, so sind auch ED . MZ und DM . MZ kommensurabel, aber ED . MZ ist rational, also auch DM . MZ, mithin ist DZ eine e r s t e M e d i a l a p o t o m e. — Es sei nun z w e i t e n s ED^2 inkommensurabel zum Rechteck EM, dann ist das Verhältnis ED : DM gleich dem eines medialen zu einem medialen Rechteck, die unter sich inkommensurabel sind, [ED und DM] sind also in der Potenz kommensurabel; also DM auch medial; nun sind auch DM und MZ in der Potenz kommensurabel, denn jedes einzelne ist in der Potenz kommensurabel zu ED; weil nun ED in der Länge inkommensurabel zu DM ist und die Proportion besteht: $ED : DM = ED . MZ : DM . MZ$, so sind diese beiden Rechtecke ebenfalls inkommensurabel, aber ED . MZ (= Rechteck NZ) ist rational, also ist DM . MZ nicht rational, sondern medial, mithin die Linien DM und MZ medial, in der Potenz kommensurabel, ihr Rechteck medial, also DZ eine z w e i t e M e d i a l - a p o t o m e. Wird also das Quadrat einer ersten Medialapotome oder einer mit einem Rationalen ein mediales Ganzes Gebenden an eine Mediallinie angelegt, so entsteht als Breite eine erste oder zweite Medialapotome.

(S. 65) Es sei nun [zuletzt] AB eine von den zwei übrigbleibenden Irrationallinien, also entweder eine z w e i t e M e d i a l a p o t o m e oder eine m i t e i n e m M e d i a l e n e i n m e d i a l e s G a n z e s G e b e n d e und ED wieder eine Mediallinie und Rechteck $EZ = AB^2$ und Linie FS rational und Rechteck $SR = AB^2$, so ist FR entweder eine dritte oder sechste Apotome, je nachdem AB entweder die dritte oder sechste der durch Subtraktion entstehenden Irrationallinien ist. Es werde TR an FR angefügt, [so daß FT der Minuend und TR der Subtrahend der dritten oder sechsten Apotome ist], und Rechteck NZ = Rechteck HR gemacht; weil nun FR entweder eine dritte oder sechste Apotome ist, so ist jede

einzelne der Linien FT, TR inkommensurabel in der Länge zu FS, der angenommenen rationalen Linie, also sind sie rational. in der Potenz kommensurabel zu FS, mithin ist jedes der Rechtecke ST, HR medial, also auch jedes der Rechtecke EM, NZ medial; weil nun das Quadrat von ED medial ist, so ist es entweder kommensurabel zum Rechteck EM oder zu NZ oder inkommensurabel [zu diesen]; denn es ist nicht möglich, daß es zu beiden kommensurabel sei, weil dann das Rechteck EM kommensurabel zum Rechteck NZ wäre, d. h. Rechteck ST kommensurabel zu HR, also Linie FT kommensurabel zu TR, diese wurden aber zueinander inkommensurabel in der Länge angenommen. Es sei nun [erstens] ED^2 kommensurabel zu einer der Flächen EM oder NZ, dann ist, weil jede dieser Flächen medial ist und sie unter einander inkommensurabel sind, DM in der Potenz kommensurabel zu MZ, und weil ED^2 kommensurabel zu einem der Rechtecke EM oder NZ, so ist ED in der Länge kommensurabel zu einer der Linien DM, MZ, also ist eine von diesen ebenfalls medial, und da beide in der Potenz kommensurabel sind, so ist die andere auch medial, weil die zu einer medialen kommensurable Fläche medial und die eine Mediale Potenzierende medial ist; also sind die beiden Linien DM, MZ medial, in der Potenz kommensurabel, und weil das Rechteck aus ED und DM medial ist, mithin auch das aus ED und MZ, so ist auch das aus DM und MZ ohne Zweifel kommensurabel zu einem von jenen beiden, da Linie ED in der Länge kommensurabel zu einer der Linien DM, MZ ist, also ist das Rechteck DM . MZ medial, also Linie DZ eine zweite Medialapotome (S. 66). — Es sei nun [zweitens] ED^2 inkommensurabel zu jeder[237]) der Flächen EM, NZ, dann ist das Verhältnis von ED zu jeder einzelnen der Linien DM, MZ gleich dem Verhältnis eines medialen zu einem medialen Rechteck, inkommensurabel zueinander, also ist jede der Linien DM, MZ in der Potenz kommensurabel zu ED, und weil Rechteck EM inkommensurabel zu NZ und DM in der Länge inkommensurabel zu MZ ist, so sind die Linien DM und MZ medial, in der Potenz kommensurabel und also das Rechteck aus ihnen entweder rational oder medial, mithin ist DZ entweder eine erste oder eine zweite Medialapotome. — Wir haben also durch unsere Betrachtungen gefunden, daß die Quadrate aller der Irrationallinien, die durch Subtraktion gebildet werden, wenn sie an eine mediale Linie angelegt werden, als Breite entweder eine erste oder zweite Medialapotome hervorbringen, wie die Quadrate der Irrationallinien, die durch Addition entstehen, die entsprechenden Linien zu jenen beiden hervorbringen, d. h. entweder eine erste oder zweite Bimediale.

Wir könnten noch auf viele andere Arten Anlegungen ausführen; z. B wenn das Quadrat einer Mediallinie an jede der Irrationallinien angelegt wird, die durch Addition entstehen, so entsteht als Breite je die entsprechende[238])

237) Der Text hat wohl unrichtig: „zu einer“.

238) D. h. entsprechend in Bezug auf die Art, aber nicht in Bezug auf die Gleichheit der einzelnen Glieder; so entsteht, wenn das Quadrat der Mediallinie $\sqrt{2\sqrt{5}}$ an das Binomium $\sqrt{10} + \sqrt{8}$ angelegt wird, die Apotome $\sqrt{50} - \sqrt{40}$.

Irrationallinie, die durch Subtraktion entsteht, wie oben schon gezeigt worden ist, oder umgekehrt[239]); und dies deshalb, weil beim medialen Rechteck (d. h. beim Quadrat der Mediallinie), wenn die eine der es bildenden Linien eine der Irrationalen ist, die durch Addition entstehen, die andere die jener entsprechende von den Linien sein muß, die durch Subtraktion entstehen, und umgekehrt, was schon oben bewiesen worden ist. — Wir können ferner auch die Quadrate der Linien, die durch Addition entstehen, an die Linien, die durch Subtraktion entstehen, anlegen und umgekehrt und die zugehörigen Breiten bestimmen. Ob wir nun die Anlegungen an die Mediallinie oder an eine der Linien, die durch Addition entstehen, [oder an eine derjenigen, die durch Subtraktion entstehen] ausführen, wir kommen immer auf Formen und Arten, die vorher schon vorgekommen sind. Wir wollen uns daher mit dem, was wir behandelt haben, begnügen, wenn dies (S. 67) auch nur ein einzelnes Blatt aus dem Gesamtgebiet über die irrationalen Linien ist; denn wir haben damit den Grund kennen gelernt, weshalb die Anlegungen notwendig sind, und der ist die Lehre vom Kommensurabeln und Inkommensurabeln[240]).

Wir haben auch eine genügende Kenntnis darüber erlangt, daß die Zahl der Irrationallinien groß, ja sogar unendlich groß ist, d. h. also derjenigen, die durch Addition, wie derer, die durch Subtraktion gebildet werden, wie auch der Mediallinien, wie Euklides schon gezeigt hat, als er feststellte, daß aus der Mediallinie andere Irrationallinien ohne Zahl abgeleitet werden können [Satz 115], entsprechend der Art der Linien, die vorher behandelt worden sind. Wenn nun schon aus der Mediallinie eine unendliche Zahl anderer Linien entstehen kann, was kann man dann von denen sagen, die aus der übrigen Zahl der Irrationallinien entstehen können, und zwar ordnungsgemäß oder nicht ordnungsgemäß? Es ist für jedermann klar, daß man sagen darf, daß auf diese Weise unendlich mal unendlich viele[241]) [solcher Linien] entstehen können[242]).

Jetzt wollen wir uns mit dem Gesagten über die irrationalen Größen begnügen. Von diesem aus sind wir imstande, weitere Untersuchungen über diese Probleme anzustellen, wie z. B. die folgende: Wenn eine rationale und eine irrationale Linie gegeben sind, welches ist das geometrische Mittel zwischen ihnen, welches die dritte Proportionale zu ihnen, wenn die rationale als erste angenommen wird, oder auch, wenn die irrationale als erste angenommen wird? Dies können wir auf jede der Irrationallinien ausdehnen, z. B. wenn eine rationale Linie und ein Binomium oder eine Apotome gegeben ist, welches ist dann das geometrische Mittel zwischen ihnen, welches die dritte Proportionale?[243]) u. s. f. Oder es sei eine Mediallinie gegeben und eine rationale oder eine von den zusammen-

239) Die Umkehrung wird vollständig wiederholt.

240) Der Text hat nur: „und dieses sind die Kommensurabilitäten."

241) Dies ist nicht streng mathematisch aufzufassen; denn da die Anzahl der von Euklides untersuchten Irrationallinien 13 ist, so wäre die Zahl mathematisch genau $13 . \infty = \infty$.

242) Dieses Alinea wurde ebenfalls schon von Woepcke ins Französische übersetzt (vergl. l. c. p. 702).

243) Vergl. Anhang Nr. 24.



gesetzten Irrationallinien, so können wir fragen: welches ist die mittlere, welches die dritte Proportionale zu ihnen? Denn wenn aus Anlegungen entstandene Breiten bekannt sind, und wir wissen, daß [bei der stetigen Proportion] das Rechteck aus den beiden äußern Gliedern gleich dem Quadrat des mittlern Gliedes ist, so ist für uns die Auffindung jener [gesuchten Größen] eine leichte Sache

(S. 68) Beendigt ist der zweite Teil und damit der [ganze] Kommentar des X. Buches des Euklides, übersetzt von Abû ʻOthmân al-Dimashkî. Lob sei Gott, er segne Muḥammed und seine Familie und bringe ihr Heil! Geschrieben von Aḥmed b. Muḥ. b. ʻAbdaldjalîl in Shurâz im Monat Djîmâdâ I d. Jahres 358 d. H. (= März 969)[244].

Anhang.

1. Der Satz, „daß die in der Potenz rationalen . . . eine mediale Fläche bilden", enthält Fehler, es sollte heißen: „daß die rationalen Linien bald eine rationale, bald eine mediale Fläche bilden, und ebenso die medialen, in der Potenz kommensurabeln Linien bald eine rationale, bald eine mediale Fläche bilden." Beispiele: 1) Die rationalen Linien 5 und 7 bilden die rationale Fläche 35, die ebenfalls rationalen, aber nur in Potenz kommensurabeln Linien 2 und $\sqrt{3}$ bilden die mediale Fläche $2\sqrt{3}$. — 2) Ähnlich bilden die medialen, in der Potenz kommensurabeln Linien $\sqrt[4]{8}$ und $\sqrt[4]{2}$ die rationale Fläche $\sqrt[4]{16} = 2$, während die medialen, ebenfalls in der Potenz kommensurabeln Linien $\sqrt[4]{12}$ und $\sqrt[4]{3}$ die mediale Fläche $\sqrt[4]{36} = \sqrt{6}$ bilden. — Die Ähnlichkeit besteht also eigentlich nur darin, daß zwei rationale, in der Länge kommensurable Linien stets ein rationales Rechteck bilden, und daß zwei mediale, in der Länge kommensurable Linien stets ein mediales Rechteck bilden; was aber die nur in Potenz kommensurabeln Linien anbetrifft, so bilden die rationalen stets ein mediales Rechteck, die medialen Linien aber können bald ein rationales, bald ein mediales Rechteck bilden (s. oben die Beispiele unter 2), und dies ist keine Ähnlichkeit mehr.

2. Man vergleiche hiemit das Scholium im Cod. Laurent XXVIII, 2 (Heiberg, Literargesch. Studien über Euklid, p. 163): ***ὡς λέγει Πάππος ἐν ἀρχῇ*** etc. Hier steht freilich ***δεδομένον*** statt ***σύμμετρον***.

3. Die Linien, die das Rechteck bilden, seien z. B. $3\sqrt[4]{2}$ und $2\sqrt[4]{2}$, so sind sie also kommensurabel in der Länge, ihr Produkt aber ist $= 6\sqrt{2}$, also ein mediales, nicht rationales Rechteck.

4. Der Schlußsatz ist nicht ganz richtig: wenn die gegebene rationale Linie z. B. 10 ist und die das Rechteck bildenden Linien z. B. 5 und $\sqrt{3}$, so ist das Rechteck $= 5\sqrt{3}$, also medial, aber die eine seiner Seiten, nämlich 5, ist zur gegebenen rationalen Linie (10) kommensurabel, also brauchen nicht beide Seiten zur gegebenen rationalen Linie inkommensurabel in der Länge zu sein

244) Vergl. Anhang Nr. 25.



5. Z. B. $3\sqrt{2}$ oder $\sqrt{18}$ ist eine rationale Linie, die Fläche, die sie potenziert, ist 18, also rational; $\sqrt[4]{12}$ ist eine irrationale Linie, und zwar eine Mediallinie, die Fläche, die sie potenziert, ist $\sqrt{12}$, also medial.

6. Die mediale Fläche entsteht:

1) aus zwei rationalen, nur in Potenz kommens. Linien: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$,

2) aus zwei in der Länge kommens. Mediallinien: $2\sqrt[4]{5} \cdot 3\sqrt[4]{5} = 6\sqrt{5} = \sqrt{180}$,

3) aus zwei in der Potenz kommens. Mediallinien: $\sqrt[4]{20} \cdot \sqrt[4]{45} = \sqrt[4]{900} = \sqrt{30}$.

Die rationale Fläche entsteht:

1) aus zwei ration., in der Länge kommens. Linien: $3 \cdot 5 = 15$, oder $\sqrt{18} \cdot \sqrt{8} = 12$,

2) aus zwei in der Potenz kommens. Mediallinien: $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{1296} = 6$.

7. Nach der Auffassung Woepckes sind also die drei Linien die folgenden: Mediallinie $= \sqrt{a\sqrt{\frac{a^2}{2}}}$, Binomium $= a + \sqrt{\frac{a^2}{2}}$, Apotome $= a \sqrt{\frac{a^2}{2}}$; nach der meinigen wären sie: Mediallinie $= \sqrt{a\sqrt{2a}}$, Binomium $= \sqrt{2a^2} + a$, Apotome $= \sqrt{2a^2} - a$; beide Auffassungen werden den Definitionen des Euklides gerecht.

8. Hier ist der Text jedenfalls unsicher, besser wäre nach unserer Ansicht: „wenn wir von der als Rest bleibenden Apotome eine weitere rationale Linie subtrahieren" . . . Woepcke bemerkt hiezu: C'est à dire: on forme les apotomées successives: $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, $\sqrt{b} - \sqrt{c}$, $\sqrt{c} - \sqrt{d}$ etc. On se serait attendu, sans doute, à voir l'auteur former et discuter les expressions suivantes: $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, $\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c}$, $\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} - \sqrt{d}$ etc. — Wir sind derselben Ansicht, und der Text könnte wohl auch so gedeutet werden; denn es wäre möglich, daß das arab. mafṣûl hier nicht mit „abgeschnitten" (retranché) zu übersetzen wäre, sondern bedeuten würde: „Die Linie, die durch Abschneiden, Abtrennung entstanden ist", d. h. „die verkürzte Linie".

9. Wir geben im folgenden Zahlenbeispiele zu den sechs Irrationallinien dieser ersten Hexade:

1) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ (oder auch $5 + \sqrt{3}$, oder $\sqrt{5} + 3$) = Binomium.

Beide Teile (Glieder) sind in Potenz kommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist rational (8 oder 28 oder 14), ihr Produkt (Rechteck) ist medial ($\sqrt{15}$ oder $5\sqrt{3}$ oder $3\sqrt{5}$).

2) $\sqrt{3\sqrt{6}} + \sqrt{2\sqrt{6}}$ (oder $\sqrt[4]{54} + \sqrt[4]{24}$) = erste Bimediale.

Beide Teile sind in Potenz kommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist medial ($5\sqrt{6}$), ihr Produkt rational (6).

3) $\sqrt{3\sqrt{5}} + \sqrt{2\sqrt{5}}$ (oder $\sqrt[4]{45} + \sqrt[4]{20}$) = zweite Bimediale.

Beide Teile sind in Potenz kommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist medial ($5\sqrt{5}$), ihr Produkt medial ($\sqrt{30}$).

4) $\sqrt{6 + \sqrt{8}} + \sqrt{6 - \sqrt{8}}$ = major.



Beide Teile sind in Potenz inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist rational (12), ihr Produkt medial ($\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$).

5) $\sqrt{\sqrt{34}+3} + \sqrt{\sqrt{34}-3}$ = die ein Rationales und Mediales Potenzierende (d. h. das Quadrat der ganzen Linie ist gleich der Summe aus einem rationalen und medialen Rechteck, nämlich $2\sqrt{34} + 10$).

Beide Teile sind in Potenz inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist medial ($2\sqrt{34}$), ihr Produkt rational (5).

6) $\sqrt{\sqrt{12}+\sqrt{6}} + \sqrt{\sqrt{12}-\sqrt{6}}$ = die zwei Mediale Potenzierende (d. h. das Quadrat der ganzen Linie ist gleich der Summe zweier medialer Rechtecke, nämlich $= 2\sqrt{12} + 2\sqrt{6}$).

Beide Teile sind in Potenz inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist medial ($2\sqrt{12}$), ihr Produkt medial ($\sqrt{6}$).

(Vergl. auch Biblioth. mathem. $\mathbf{7}_3$, 235/36. 1906 07.

10. Wir geben hier Beispiele für die zweite Hexade der Irrationallinien, und zwar nehmen wir die rationale Linie, an die die Quadrate der Irrationallinien der ersten Hexade angelegt werden, = 1 an, dann sind also die Breiten der so entstehenden Rechtecke selbst die Quadrate der Irrationallinien der ersten Hexade und bilden nun die Irrationallinien der zweiten Hexade. Z. B. $m + \sqrt{n}$ sei ein Binomium, sein Quadrat $(m + \sqrt{n})^2$ werde in ein Rechteck verwandelt mit der Länge 1, dann muß seine Breite also gleich $(m + \sqrt{n})^2$, oder $= (m^2 + n) + 2m\sqrt{n}$ sein, dies ist wieder ein Binomium, das wir jetzt zur Unterscheidung von dem ersten „die erste Binomiale" nennen; so entsprechend für die andern fünf Irrationallinien.

1. Das Quadrat von $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ ist gleich $8 + 2\sqrt{15} = 8 + \sqrt{60}$, und dies ist eine erste Binomiale.

Der größere Teil ist rational, der kleinere irrational (diese Begriffe im heutigen Sinne genommen), das Quadrat des größern Teils übertrifft das des kleinern um eine Größe, deren Quadratwurzel zum ersten Teil kommensurabel ist.

2. Das Quadrat von $\sqrt{3\sqrt{6}} + \sqrt{2\sqrt{6}}$ ist gleich $5\sqrt{6} + 12 = \sqrt{150} + 12$, dies ist eine zweite Binomiale.

Der größere Teil ist irrational, der kleinere rational; das Quadrat des größern Teils übertrifft das des kleinern um eine Größe, deren Quadratwurzel zum ersten Teil kommensurabel ist.

3) Das Quadrat von $\sqrt{3\sqrt{5}} + \sqrt{2\sqrt{5}}$ ist gleich $5\sqrt{5} + 2\sqrt{30} = \sqrt{125} + \sqrt{120}$, dies ist eine dritte Binomiale.

Beide Teile sind irrational; das Quadrat des größern Teils übertrifft das des kleinern um eine Größe, deren Quadratwurzel zum ersten Teil kommensurabel ist.

4. Das Quadrat von $\sqrt{6 + \sqrt{8}} + \sqrt{6 - \sqrt{8}}$ ist gleich $12 + 2\sqrt{28} = 12 + \sqrt{112}$, dies ist eine vierte Binomiale.

Der größere Teil ist rational, der kleinere irrational; das Quadrat des

größern Teils übertrifft das des kleinern um eine Größe, deren Quadratwurzel zum ersten Teil inkommensurabel ist.

5. Das Qudrat von $\sqrt{\sqrt{34}+3}+\sqrt{\sqrt{34}-3}$ ist gleich $2\sqrt{34}+10=\sqrt{136}+10$, dies ist eine fünfte Binomiale.

Der größere Teil ist irrational, der kleine rational; das Quadrat des größern Teils übertrifft das des kleinern um eine Größe, deren Quadratwurzel zum ersten Teil inkommensurabel ist.

6. Das Quadrat von $\sqrt{\sqrt{12}+\sqrt{6}}+\sqrt{\sqrt{12}-\sqrt{6}}$ ist gleich $2\sqrt{12}+2\sqrt{6}=\sqrt{48}+\sqrt{24}$, dies ist eine sechste Binomiale.

Beide Teile sind irrational; das Quadrat des größern Teils übertrifft das des kleinern um eine Größe, deren Quadratwurzel zum ersten Teil inkommensurabel ist.

(Vergl. auch Biblioth. mathem. $\mathbf{7}_3$, 237. 1906/07.

11. Die Irrationallinien der dritten Hexade, die durch Subtraktion entstehen und denen der ersten Hexade entsprechen (s. Nr. 9), sind also:

1. $\sqrt{5}-\sqrt{3}$, sie heißt Apotome,
2. $\sqrt{3\sqrt{6}}-\sqrt{2\sqrt{6}}$, sie heißt erste Medialapotome,
3. $\sqrt{3\sqrt{5}}-\sqrt{2\sqrt{5}}$, sie heißt zweite Medialapotome,
4. $\sqrt{6+\sqrt{8}}-\sqrt{6-\sqrt{8}}$, sie heißt Minor,
5. $\sqrt{\sqrt{34}+3}-\sqrt{\sqrt{34}-3}$, sie heißt die mit einem Rationalen ein mediales Ganzes Gebende[1]),
6. $\sqrt{\sqrt{12}+\sqrt{6}}-\sqrt{\sqrt{12}-\sqrt{6}}$, sie heißt die mit einem Medialen ein mediales Ganzes Gebende[2]).

(Vergl. auch Biblioth. mathem. $\mathbf{7}_3$, S. 234—235.)

12. Hier geben wir die Beispiele für die Irrationallinien der vierten Hexade, die also, wenn die rationale Linie $= 1$ gesetzt wird, die Quadrate der Irrationallinien der dritten Hexade sind, d. h. der in Nr. 11 gegebenen Irrationallinien. Wir lassen die Anführung der jeweiligen unterscheidenden Eigenschaften weg, da sie dieselben sind wie bei den Binomialen.

1. Das Quadrat von $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ist gleich $8-\sqrt{60}$, und dies ist eine erste Apotome.

2. Das Quadrat von $\sqrt{3\sqrt{6}}-\sqrt{2\sqrt{6}}$ ist gleich $\sqrt{150}-12$, und dies ist eine zweite Apotome.

3. Das Quadrat von $\sqrt{3\sqrt{5}}-\sqrt{2\sqrt{5}}$ ist gleich $\sqrt{125}-\sqrt{120}$, und das ist eine dritte Apotome.

4. Das Quadrat von $\sqrt{6+\sqrt{8}}-\sqrt{6-\sqrt{8}}$ ist gleich $12-\sqrt{112}$, und dies ist eine vierte Apotome.

5. Das Quadrat von $\sqrt{\sqrt{34}+3}-\sqrt{\sqrt{34}-3}$ ist gleich $\sqrt{136}-10$, und dies ist eine fünfte Apotome.

1) D. h. das Quadrat der Linie ist gleich der Differenz aus einem medialen und rationalen Rechteck.

2) D. h. das Quadrat der Linie ist gleich der Differenz aus zwei medialen Rechtecken.

6. Das Quadrat von $\sqrt{\sqrt{12}+\sqrt{6}} - \sqrt{\sqrt{12}-\sqrt{6}}$ ist gleich $\sqrt{48}-\sqrt{24}$, und dies ist eine sechste Apotome.

(Vergl. auch Biblioth. mathem. 7_3, S. 237.)

13. Dieser 1. Teil des Kommentars könnte wohl der allgemeine genannt werden, er enthält allgemeine Betrachtungen über rationale und irrationale, kommensurable und inkommensurable Größen und eine ausführliche Übersicht über den Inhalt und die Einteilung des X. Buches. — Der Inhalt des 2. Teils ist mehr spezieller Natur, Pappus beschäftigt sich darin mit einzelnen Abschnitten, Sätzen und Beweisen des Buches, gibt bisweilen andere Beweise und fügt auch, wo es ihm nötig scheint, neue Hilfssätze hinzu. Man sieht auch, daß der 2. Teil viel präziser und wissenschaftlicher durchgeführt ist als der erste; man erkennt darin eher den geschulten Mathematiker, während im 1. Teil mehr der Philosoph zur Geltung kommt; man erhält wirklich den Eindruck, daß Pappus doch mehr Mathematiker als Philosoph war, was ja wohl auch seine Collectiones beweisen.

14. Dies wären also die Mediallinie ($\sqrt{a\sqrt{b}}$), die sechs Linien der ersten Hexade (s. Nr. 9) und die sechs der dritten Hexade (s. Nr. 11); die sechs Linien der zweiten Hexade (s. Nr. 10) und die sechs der vierten Hexade (s. Nr. 12) betrachtet Euklides nicht als neue Irrationallinien; denn sie sind ebenfalls Binomien und Apotomen wie jeweilen die ersten Linien der ersten und dritten Hexade, nur mit besondern, aber nicht wesentlichen Eigenschaften, wie man aus den Beispielen, die wir gegeben haben, leicht erkennen kann.

15. Die drei ersten Beispiele der 1. Hexade (s. Nr. 9), nämlich $\sqrt{5}+\sqrt{3}$, $\sqrt{3\sqrt{6}}+\sqrt{2\sqrt{6}}$, $\sqrt{3\sqrt{5}}+\sqrt{2\sqrt{5}}$, gehören zu dieser Art: die beiden Teile sind in Potenz kommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist im 1. Beispiel rational, und auch die Quadrate der einzelnen Teile sind rational, im 2. und 3. Beispiel ist die Summe der Quadrate medial und auch die Quadrate der einzelnen Teile medial.

16. Zu dieser Art gehören die drei letzten Beispiele der 1. Hexade, nämlich $\sqrt{6+\sqrt{8}}+\sqrt{6-\sqrt{8}}$, $\sqrt{\sqrt{34}+3}+\sqrt{\sqrt{34}-3}$, $\sqrt{\sqrt{12}+\sqrt{6}}+\sqrt{\sqrt{12}-\sqrt{6}}$: die beiden Teile sind in Potenz inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist im 1. Beispiel rational, aber die Quadrate der einzelnen Teile sind nicht rational, im 2. und 3. Beispiel ist die Summe der Quadrate medial, aber die Quadrate der einzelnen Teile sind nicht medial (sondern andere irrationale Ausdrücke).

17. A———C'———B———C Die Stelle will sagen: wenn AB das Ganze und BC = BC' ein Teil von ihm ist, so ist AB + BC das Binomium, und AB — BC = AC' die Apotome.

18. Es ist eigentümlich, daß Pappus sich hier auf die Idee versteift, die Namen „Binomium" und „Apotome" oder besser die Ausdrucksweise „durch Addition und durch Subtraktion entstehende Linien" komme eigentlich daher, daß zur Entstehung dieser Linien die Addition und Subtraktion von Rechtecken notwendig sei; allerdings werden in den Beweisen des Euklides zu diesen Sätzen



rationale und mediale Rechtecke addiert und subtrahiert, daß aber die Namen dieser Irrationallinien daher stammen, davon sagt Euklides gar nichts.

19. Wir geben hier ein Beispiel zum ersten der sechs Fälle auf moderne Weise: Die beiden gegebenen Linien seien zwei rationale (nach Euklides) in Potenz kommensurable Linien, $\sqrt{m}$ und $\sqrt{n}$, so ist ihre Summe $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ ein Binomium; bezeichnen wir das harmonische Mittel aus beiden mit x, so ist:

$$x\,(\sqrt{m} + \sqrt{n}) = 2\sqrt{mn}$$

also $x = \frac{2\sqrt{mn}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{mn}(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{m-n} = \frac{2}{m-n}(m\sqrt{n} - n\sqrt{m}) = \frac{2m}{m-n}\sqrt{n} - \frac{2n}{m-n}\sqrt{m}$, und dies ist eine Apotome. — Zahlenbeispiel: Die beiden Linien (Zahlen) seien $\sqrt{3}$ und $\sqrt{2}$, dann ist $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ein Binomium, das harmon. Mittel aus beiden sei x, dann ist $x\,.\,(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 2\sqrt{6}$, also $x = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{72}-\sqrt{48}$, und dies ist eine Apotome.

Wir geben noch ein Zahlenbeispiel zum zweiten Fall:

$\sqrt{4\sqrt{12}}$, und $\sqrt{3\sqrt{12}}$ sind 2 Mediallinien, in Potenz kommensurabel, ihre Summe $\sqrt{4\sqrt{12}} + \sqrt{3\sqrt{12}}$ ist also eine erste Bimediale, das harm. Mittel aus beiden Linien sei x, dann ist $x(\sqrt{4\sqrt{12}} + \sqrt{3\sqrt{12}}) = 2\sqrt{4\sqrt{12}}\,.\,\sqrt{3\sqrt{12}} = 24$, also $x = \frac{24}{\sqrt{4\sqrt{12}} + \sqrt{3\sqrt{12}}} = \frac{24(\sqrt{4\sqrt{12}} - \sqrt{3\sqrt{12}})}{\sqrt{12}} = 2\sqrt{12}\,(\sqrt{4\sqrt{12}} - \sqrt{3\sqrt{12}}) = \sqrt{192\sqrt{12}} - \sqrt{144\sqrt{12}}$, und dies ist eine erste Medialapotome (die Summe der Quadrate der einzelnen Teile ist medial ($336\sqrt{12}$), ihr Produkt rational ($\sqrt{192\,.\,144\,.\,12} = 576$), und beide Teile sind in Potenz kommensurabel: $192\sqrt{12}$ und $144\sqrt{12}$ haben den gemeinschaftlichen Divisor $48\sqrt{12}$).

20. Unser Beweis nach der Figur (S. 53) wäre folgender: Voraussetzung BD rational, AB erste Bimediale. Es ist nach dem vorausgeschickten Satze: $AB\,.\,BG = BZ\,.\,BE = BD^2$ = rational; nun ist $BZ\,.\,BD = AB^2$ = zweite Binomiale, also BZ = (zweite Binomiale: BD) = zweite Binomiale, da BD rational ist, also BE = zweite Apotome; denn $BZ\,.\,BE = BD^2$ = rational; nun ist $BE\,.\,BD = BG^2$, aber BD ist rational, also BG^2 eine zweite Apotome, also BG eine erste Medialapotome, w. z. b. w.

21. Wir geben zu diesem nicht ganz klaren Beweise ein Zahlenbeispiel:

Die eine der Linien AB sei eine zweite Bimediale, nämlich $\sqrt{2\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3}}$, das mit GD gebildete Rechteck sei $2\sqrt{6}$, also medial; wir behaupten, daß GD eine zweite Medialapotome sei. Wir nehmen also jetzt das harmonische Mittel nicht zu Hilfe, sondern verfahren nach dem Satze und der Figur S. 61, nur ist dann GD durch BG zu ersetzen (dieses ist also die gesuchte Linie): Es ist nun also $BD^2 = AB\,.\,BG = 2\sqrt{6}$, mithin $BG = \frac{2\sqrt{6}}{AB} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{2\sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{3}})}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}(\sqrt{2\sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{3}}) = \sqrt{16\sqrt{3}} - \sqrt{8\sqrt{3}}$, und dies ist eine

zweite Medialapotome; (denn beide Teile sind in Potenz kommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist medial $(24\sqrt{3})$, und ihr Produkt ist medial $(8\sqrt{6})$).

22. Beispiel 1): Es sei AB das Binomium $= \sqrt{10} + \sqrt{8}$, und ED eine Mediallinie z. B. $= \sqrt{2\sqrt{5}}$; dann ist $EZ = AB^2 = 18 + 2\sqrt{80}$, ebenso $SR = AB^2 = 18 + 2\sqrt{80}$; wir setzen $FS = 2$, dann ist $FR = 9 + \sqrt{80}$, also $FT = 9$, $TR = \sqrt{80}$. Ferner ist nun Rechteck $ST = 18$, Rechteck $HR = 2\sqrt{80}$, also $EM = ST = 18$ und $NZ = 2\sqrt{80}$, mithin ist nun:

$$DM = \frac{18}{\sqrt{2\sqrt{5}}} = \frac{18\sqrt{2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}} = 9\sqrt{\tfrac{2}{5}\sqrt{5}} = \sqrt{\tfrac{162}{5}\sqrt{5}}$$

$$MZ = \frac{2\sqrt{80}}{\sqrt{2\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{80}\,.\,\sqrt{2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}} = 4\sqrt{2\sqrt{5}} = \sqrt{32\sqrt{5}}$$

also $DZ = \sqrt{\tfrac{162}{5}\sqrt{5}} + \sqrt{32\sqrt{5}}$, und dies ist eine erste Bimediale; denn die beiden Teile sind in Potenz kommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist medial $(\tfrac{322}{5}\sqrt{5})$, ihr Produkt (Rechteck) ist rational $(\sqrt{162\,.\,32} = 72)$.

Beispiel 2): Es sei AB eine Major $= \sqrt{8 + \sqrt{32}} + \sqrt{8 - \sqrt{32}}$ und ED eine Mediallinie, z. B. $= \sqrt{4\sqrt{12}}$; dann ist $EZ = AB^2 = 16 + 2\sqrt{32}$, ebenso $SR = AB^2 = 16 + 2\sqrt{32}$; wir setzen $FS = 2$, dann ist $FR = 8 + \sqrt{32}$, also $FT = 8$ und $TR = \sqrt{32}$. Ferner ist nun Rechteck $ST = 16$, Rechteck $HR = 2\sqrt{32}$, also $EM = ST = 16$ und $NZ = 2\sqrt{32}$, mithin ist nun:

$$DM = \frac{16}{\sqrt{4\sqrt{12}}} = \frac{16\sqrt{4\sqrt{12}}}{4\sqrt{12}} = 4\sqrt{\tfrac{1}{3}\sqrt{12}} = \sqrt{\tfrac{16}{3}\sqrt{12}}$$

$$MZ = \frac{2\sqrt{32}}{\sqrt{4\sqrt{12}}} = \frac{2\sqrt{32}\sqrt{4\sqrt{12}}}{4\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{32\sqrt{12}}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\tfrac{8}{3}\sqrt{12}},$$

also $DZ = \sqrt{\tfrac{16}{3}\sqrt{12}} + \sqrt{\tfrac{8}{3}\sqrt{12}}$, und dies ist eine zweite Bimediale; denn die beiden Teile sind in Potenz kommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist medial $(= 8\sqrt{12})$, ihr Produkt (Rechteck) ist medial $(= \sqrt{\tfrac{512}{3}})$.

23. Beispiel 1): Es sei AB die Apotome $4 - \sqrt{6}$, ED die Mediallinie $\sqrt{2\sqrt{6}}$; dann ist $EZ = AB^2 = 22 - 8\sqrt{6}$, ebenso $SR = 22 - 8\sqrt{6}$; wir setzen $FS = 2$, dann ist $FR = 11 - 4\sqrt{6}$, also $FT = 11$ und $RT = 4\sqrt{6}$; nun ist also

$$DZ = \frac{\text{Rechteck } EZ}{ED} = \frac{22 - 8\sqrt{6}}{\sqrt{2\sqrt{6}}} = \frac{(22 - 8\sqrt{6})\sqrt{2\sqrt{6}}}{2\sqrt{6}} = (11 - 4\sqrt{6})\sqrt{\tfrac{1}{3}\sqrt{6}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{121}{3}\sqrt{6}} - \sqrt{32\sqrt{6}},$$ dies ist eine erste Medialapotome;

denn die beiden Teile sind in Potenz kommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist medial $(= \tfrac{217}{3}\sqrt{6})$, ihr Produkt (Rechteck) ist rational $(= 88)$.

Beispiel 2): AB sei wieder eine Apotome $= \sqrt{5} - \sqrt{3}$ und ED eine Mediallinie $= \sqrt{2\sqrt{3}}$, dann ist $EZ = AB^2 = 8 - 2\sqrt{15}$, ebenso $SR = 8 - 2\sqrt{15}$; wir setzen FS wieder $= 2$, dann ist $FR = 4 - \sqrt{15}$, also $FT = 4$ und $RT = \sqrt{15}$, nun ist also:

$$DZ = \frac{EZ}{ED} = \frac{8 - 2\sqrt{15}}{\sqrt{2\sqrt{3}}} = \frac{(8 - 2\sqrt{15})\sqrt{2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = (4 - \sqrt{15})\sqrt{\tfrac{2}{3}\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{32}{3}\sqrt{3}} - \sqrt{10\sqrt{3}},$$ dies ist eine zweite Medialapotome,

denn die beiden Teile sind in Potenz kommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist medial ($= 6\frac{2}{3}\sqrt{3}$), ihr Rechteck ist medial ($= \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$).

24. Es sei z. B. das Binomium $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ gegeben, und die rationale Zahl 6, so ist das geometrische Mittel aus ihnen (aus der Proport. $6 : x = x : \sqrt{5} + \sqrt{3}) = \sqrt{\sqrt{45} + \sqrt{48}} + \sqrt{\sqrt{45} - \sqrt{48}}$, und dies ist eine zwei Mediale Potenzierende. — Zu den gleichen zwei Linien ist die dritte Proportionale (aus der Proport. $6 : \sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{5} + \sqrt{3} : x) = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{15}$, und dies ist eine erste Binomiale.

25. Die Abschrift dieses Kommentars wäre also nach diesem Schlußsatz ebenfalls von dem bedeutenden arabischen Geometer Aḥmed b. Muḥ. b. 'Abdaldjalîl al-Sidjzî gemacht, wie die Mehrzahl der Abhandlungen des Pariser Ms. 2457 (früher 952, Suppl. arabe); man vergleiche aber, was ich in der von mir veröffentlichten Abhandlung „Über die Ausmessung der Parabel" von Thâbit b. Ḳurra (Sitzungsberichte der phys.-medizin. Sozietät in Erlangen, Bd. 48, S. 66—67) hierüber gesagt habe, dasselbe gilt auch von dieser Schrift, d. h. sie kann nicht ein Autograph dieses Geometers sein.

Wir haben zu diesem Kommentar noch einige Schlußbemerkungen beizufügen: Wenn auch die erstaunliche Breite der Darstellung, die vielfachen Wiederholungen, die häufigen Auslassungen und die oft störende Unklarheit des Ausdrucks im Leser vielleicht hie und da Zweifel darüber aufsteigen lassen könnten, ob wirklich der Verfasser der berühmten Collectiones auch diesen Kommentar geschrieben haben möchte, so muß man wohl berücksichtigen, daß, was den ersten Punkt anbetrifft, diese Breite und Weitschweifigkeit keineswegs eine vereinzelte Erscheinung bei griechischen Mathematikern war, ist doch gerade Euklides von diesem Fehler nicht freizusprechen, und besonders sein X. Buch mit seinen 115 Sätzen bildet ein drastisches Beispiel für diese Sucht nach zu großer Ausführlichkeit: Euklides hat die Beweise für alle sechs Irrationallinien jeder Hexade stets in derselben ausführlichen breiten Form wiederholt, obgleich mit Ausnahme der jedem Falle eigenen technischen Ausdrücke die Worte und der Beweisgang ganz dieselben sind wie jeweilen im ersten Beweise; ihm ist Pappus auch im Kommentar gefolgt, und das haben auch später die arabischen Geometer von den Griechen übernommen. Was den zweiten Punkt, die häufigen Auslassungen und die oft störende Unklarheit des Ausdruckes anlangt, so brauchen wir die Schuld hiefür absolut nicht Pappus zuzuschreiben, es liegt viel näher, dafür den arabischen Übersetzer und die Abschreiber verantwortlich zu machen. Auf der andern Seite aber müssen wir nun doch anerkennen, daß der Kommentar auch seine Vorzüge hat: er ist, abgesehen von den philosophischen Partien, die aber ebenfalls infolge schlechter Übersetzung von Abschreibefehlern uns vielfach verdorben überliefert sein mögen, im allgemeinen leicht zu verstehen, er ist gut gegliedert, hebt die Einteilung und die Haupteigenschaften der verschiedenen Irrationallinien klar hervor und fügt zum besseren Verständnis verschiedene Sätze hinzu, die wir



bei Euklides in der Tat vermissen; er wird also gewiß für seine Zeit ein vorzügliches Hilfsmittel beim Studium des so schwierigen X. Buches gewesen sein. Daß er keine Zahlenbeispiele bringt, die das Verständnis noch mehr erleichtert hätten, liegt eben im Charakter der griechischen Geometrie von Euklides an begründet (teilweise Archimedes und dann Hero und seine Schule ausgenommen); Arithmetik (oder besser Logistik) und Geometrie waren scharf getrennt, diskrete und stetige Größen standen in einem Widerspruch: einer Zahl entsprach immer eine Linie (Strecke), einer Strecke aber nicht immer eine Zahl; die griechischen Geometer kannten nur eine irrationale Linie, aber keine irrationale Zahl. Erst bei den byzantinischen Glossatoren und den Arabern finden wir Zahlenbeispiele zu den Sätzen des X. Buches, bei den Arabern sogar einen größern Kommentar zu diesem Buche mit solchen Beispielen.

Daß aus diesem Kommentar des Pappus unsere Kenntnis über das Wissen der pythagoräischen Schule von den irrationalen Größen, besonders die Beziehungen von Theodorus zu Theätetus und von diesem zu Euklides, eine wesentliche Erweiterung und Klärung erfahren würde, wie man wohl nach der Analyse, die uns Woepcke seiner Zeit von dieser Arbeit gegeben hat, zu hoffen berechtigt war, hat sich leider nicht bewährt; doch sind wir durch ihn vielleicht imstande, die Leistungen des Theätetus auf diesem Gebiete etwas richtiger einzuschätzen, als es bis jetzt durch die Geschichtsschreiber der Mathematik geschehen ist. Es handelt sich hier in erster Linie um den Lehrsatz 9 des X. Buches, der nach den meisten modernen Gelehrten, die über diese Ursprungsgeschichte des Irrationalen geschrieben haben, dem Theätetus oder sogar Theodorus zuzusprechen wäre. Es ist wohl, wie man aus der bekannten Stelle im Dialog Theätetus von Plato[3]) schließen muß, von Theodorus schon der Begriff des Irrationalen (in unserm Sinne) richtig erkannt und wohl auch definiert worden[4]); von ihm oder von Theätetus stammt auch die Erkenntnis, daß Quadratwurzeln aus Rechteckzahlen, d. h. aus Produkten von zwei ungleichen Faktoren nicht kommensurabel zu denen aus Quadratzahlen sind. Etwas anderes kann man aus der betreffenden Stelle dieses Dialoges nicht herauslesen. Von hier an bis zur allgemein gültigen Definition inkommensurabler Größen brauchte es aber noch einen weitern Schritt, und dieser scheint nicht einmal, und wir glauben, Pappus habe hierin recht (vergl. S. 22), von Theätetus getan worden zu sein, erst Euklides hat eben im 9. Satz des X. Buches die richtige Definition aufgestellt und bewiesen[5]).

3) Vergl. H. Vogt, Die Entdeckungsgeschichten des Irrationalen, etc. in Biblioth. mathem. [3], **10**, 99—100. 1909/10.

4) Es wird berichtet, daß er die Irrationalität von $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ . . . bis $\sqrt{17}$ erkannt und auch bewiesen habe.

5) Der Satz 9 lautet: Die Quadrate von Geraden, die in der Länge kommensurabel sind, verhalten sich wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl, und Quadrate, die sich verhalten wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl, haben in der Länge kommensurable Seiten. Die Quadrate von Geraden aber, die in der Länge inkommensurabel sind, verhalten sich nicht wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl, und Quadrate, die sich nicht verhalten wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl, haben in der Länge inkommensurable Seiten.



Man darf nicht vergessen, daß es für jene Zeit keine leichte Sache war, zu erkennen, daß z. B. $\sqrt{18}$ und $\sqrt{8}$ kommensurable Größen sind, weil eben das gemeinschaftliche Maß $\sqrt{2}$ selbst eine irrationale Größe ist; aus den Stellen des Dialoges, die über die Leistungen des Theätetus berichten, ergibt sich keineswegs, daß dieser Mathematiker diese Einsicht gehabt habe, erst der Satz des Euklides ließ hierüber keinen Zweifel mehr übrig: die Zahlen 18 und 8 verhalten sich wie die zwei Quadratzahlen 9 und 4, deshalb sind die Wurzeln aus ihnen kommensurabel.

Es sind nun noch einige andere Stellen über Theätetus' Leistungen zu berücksichtigen: Aus den Stellen bei Proklus kann man sehr wenig schließen; er sagt nur (Ausgabe von Friedlein, S. 66), daß durch Leodamas, Archytas und Theätetus die Theoreme vermehrt wurden und zu einer strengern wissenschaftlichen Darstellung gelangten. Und das Scholium zu Euklides X, 9, das schon Commandinus aufgenommen und ins Lateinische übersetzt hat, sagt: „Dies Theorem ist eine Erfindung des Theätetus, es wird von Plato im [Dialog] Theätetus erwähnt, aber dort wird es nur speziell, hier [bei Euklides] dagegen allgemein ausgesprochen (wörtl. dargelegt)"[6]. Dies kann doch nicht anders aufgefaßt werden, als daß das Theorem in der Form des Theätetus nicht allgemeine Gültigkeit habe. Er fügt dann noch weiter hinzu: „Denn dort [im Theätetus] wird gesagt, daß von Quadratzahlen gemessene Quadrate auch kommensurable Seiten haben. Dieser Satz ist aber nur speziell, denn er umfaßt nicht alle kommensurabeln Flächen, deren Seiten auch kommensurabel sind; z. B. die Seiten der kommensurabeln Vierecke 18 und 8, wenn sie auch nicht durch Zahlen gemessen werden können (durch ein Zahlenmaß ausgedrückt werden können), sind doch auf eine andere Weise kommensurabel". Hieraus, besonders aus dem Zahlenbeispiel 18 und 8, kann man wohl schließen, daß auch dieser Scholiast aus dem Kommentar des Pappus geschöpft hat. — Doch darf man auf die Scholiasten im allgemeinen nicht zu stark vertrauen, es gibt unter den von Heiberg im unten zitierten 5. Bande herausgegebenen solche, die das abstruseste Zeug behaupten; so verwechselt der Verfasser von Nr. 73 (S. 455) das Inkommensurable mit dem Teilerfremden (d. h. mit relativen Primzahlen), wenn er sagt: „Z. B. 5 und 7, die in Länge inkommensurabel sind[7]), sind es auch in Potenz, denn 25 und 49 werden durch kein gemeinsames Maß gemessen." Ein anderer (Nr. 64, S. 452) sagt: „Es ist zu wissen, daß die Quadrate von in Länge kommensurablen Geraden sich zueinander verhalten wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl, daß aber nicht umgekehrt, wenn zwei Quadrate sich zueinander verhalten wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl, dann auch ihre Seiten[8]) in Länge kommensurabel sind; denn (z. B.) 18 hat zu 8 das Verhältnis wie 9 zu 4, also wie zwei Quadratzahlen, gleichwohl ist die Seite von 18 in der Länge nicht kommen-

6) Vergl. Euclidis Elementa, ed. Heiberg, Vol. V, p. 450, Nr. 62, und Knoche, Untersuchungen, etc. S. 24 25.

7) Der Text hat fehlerhaft „kommensurabel".

8) Wörtlich „die sie potenzierenden Geraden".



surabel zur Seite von 8, denn die erste ist $4^p\ 14'\ 33''$, die letzte $2^p\ 49'\ 42''$“[9]). — Dieser Scholiast hatte also gar keine Ahnung von Kommensurabilität und ihrem Gegensatz gehabt. Das ist gerade der Punkt, auf den Pappus (s. oben S. 19) anspielt mit den Worten: „Deshalb wird auch die Untersuchung über dieses schwer verständlich sein für diejenigen, welche versuchen für diese Linien, die diese Potenzen (d. h. 18 und 8) potenzieren, ein gemeinschaftliches Maß festzustellen“.

Auch Suidas hat eine ganz kurze Stelle[10a]) über Theätetus, die von den einen[10b]) übersetzt wird mit: „er schrieb zuerst über die fünf (regelmäßigen) Körper“, von den andern[11]) mit: „er zeichnete (konstruierte) zuerst die fünf (regelmäßigen) Körper“. Ich will mich nicht in philologische Sachen einmischen, bemerke nur Vogt gegenüber, daß „konstruieren“ keineswegs mit „zeichnen“ identisch zu sein braucht. Aus dieser Stelle aber schließen zu wollen, daß ein großer Teil des XIII. Buches auf Theätetus zurückzuführen sei, ist entschieden zu weit gegangen.

Was sagt nun unser Kommentar über Theätetus? Die erste Stelle (S. 13) lautet: „Was die genauen Beweise und die scharfen Unterscheidungen zu denselben (den Sätzen über jene genannten Größen) anbetrifft, so glaube ich, daß sie hauptsächlich durch diesen Gelehrten festgelegt worden sind“. Dies ist ein sehr allgemeines Urteil, aus dem wir nichts Bestimmtes entnehmen können; es widerspricht auch teilweise der folgenden und der zuletzt zitierten Stelle des Kommentators. Bald nacher (S. 13) sagt er nämlich: „Was Euklides anbetrifft, so war sein Ziel, wissenschaftlich unanfechtbare Regeln für die Kommensurabilität und Inkommensurabilität zu geben; ebenfalls stellte er strenge Definitionen und Unterscheidungsmerkmale für die rationalen und irrationalen Größen auf“, etc. Und nachdem er von Apollonius gesprochen, kommt er nochmals auf Theätetus zurück und sagt (S. 13): „Denn Theätetus hatte die in der Länge kommensurabeln Potenzen von den inkommensurabeln unterschieden und hatte die bekannten Irrationallinien nach den verschiedenen Mitteln eingeteilt, indem er die Mediallinie dem geometrischen, das Binomium dem arithmetischen und die Apotome dem harmonischen Mittel zuteilte, wie Eudemus berichtet hat“[12]). Später tritt er auf die Definition der kommensurabeln und inkommensurabeln Größen etwas näher ein und kommt (S. 22) zu dem Schluß: „Wir müssen nun bemerken, daß wirklich die Ausdrucksweise des Theätetus nicht für alle in der Länge kommensurabeln und inkommensurabeln Potenzen paßt, u. s. w. . . . Was aber Euklides anbetrifft, so gilt seine Ausdrucksweise für alle Potenzen, er zieht zur Vergleichung nicht eine bestimmte rationale Potenz und eine bestimmte Linie herbei“.

---

9) Dies sind die Quadratwurzeln aus 18 u. 8 in Sexagesimalbrüchen bis auf Sekunden genau.

10a) Vergl. Suidae Lexicon, rec. Bernhardy. Berlin 1854, p. 1120: *πρῶτος δὲ τὰ πέντε καλούμενα στερεὰ ἔγραψε.*

10b) Bernhardy, Bretschneider, Cantor.

11) Boeckh, H. Vogt.

12) Wahrscheinlich meinte Pappus mit der zuerst zitierten Stelle die Beweise zu den hier genannten Sätzen über die Zuteilung der drei Irrationiallinien zu den drei Mitteln.

Unsere Meinung ist daher, daß es zu weit gegangen ist, wenn einige der neuern Geschichtschreiber der Mathematik behaupten[13]), ein großer Teil des X. und des XIII. Buches sei auf Theätetus zurückzuführen; nach den zitierten Stellen dieses Kommentars kann diese Ansicht nicht aufrecht erhalten und durch triftige Gründe gestützt werden.

Nach den Quellen kann man also dem Theätetus, wenn man keine Hypothesen hinzufügen will, nur folgendes zuschreiben: 1. Er hat zuerst den Satz für die Unterscheidung der kommensurabeln und inkommensurabeln Linien nach der Beschaffenheit ihrer Quadrate aufgestellt und wohl auch Beweise dazu gegeben; dieser Satz aber war keineswegs allgemein gültig, nach ihm wären $\sqrt{18}$ und $\sqrt{8}$ inkommensurabel, erst Euklides hat in X, 9 den richtigen Satz gegeben und bewiesen[14]). — 2. Er hat zuerst die drei Hauptklassen der irrationalen Linien, die Mediale, das Binomium und die Apotome, unterschieden und gezeigt, daß die erste aus dem geometrischen, die zweite aus dem arithmetischen und die dritte aus dem harmonischen Mittel hervorgeht. — 3. Er hat zuerst über die fünf regelmäßigen Körper geschrieben oder zuerst sie gezeichnet (?) — Was von diesen Erkenntnissen schon auf Theodorus von Kyrene zurückzuführen sei, ist nicht mit Sicherheit anzugeben, es wäre denn, daß man aus den Worten des Kommentars (S. 13): „und hatte die bekannten Irrationallinien nach den Medietäten eingeteilt", schließen wollte, diese Unterscheidung der Irrationallinien in Mediale, Binomium und Apotome sei schon vor Theätetus, also vielleicht von Theodorus aufgestellt worden.

Über den Zweck des X. Buches ist schon manches geschrieben worden. Zweifellos ist er in erster Linie, worauf auch Pappus im Anfang und an andern Stellen seines Kommentars hinweist, eine sichere, theoretisch unanfechtbare Begründung der Lehre vom Irrationalen und Inkommensurabeln, in zweiter Linie eine nach bestimmten Gesichtspunkten und Grundsätzen aufgestellte Klassifizierung der irrationalen Ausdrücke, die im Gebiete der alten Geometrie, besonders in den Elementen und Daten des Euklides auftreten. Solche irrationale Ausdrücke zeigen sich besonders bei der Teilung einer Strecke nach dem goldenen Schnitt und bei den Aufgaben, aus dem Radius des Kreises die Seiten der einbeschriebenen regelmäßigen Vielecke (bis zum Fünfeck) und aus dem Radius der Kugel die Seiten der fünf regelmäßigen Körper zu berechnen (XIII. Buch)[15]).

13) M. Cantor sagt sogar (Vorlesgn I, 2. Aufl. S. 261, 3. Aufl. S. 276), daß Teile des X. und des XIII. Buches teilweise wörtlich von Theätetus übernommen worden seien. Wo finden sich die Beweise hiefür? — Zu den in ihren Schlüssen zu weit gehenden Historikern der Mathematik gehört auch E. Hoppe im 1. Bd. der Bibliothek der klassischen Altertumswissenschaften, S. 225 u. a. a. O. (Vergl. auch Biblioth. Mathem. [3], 12, 354 u. ff. 1911/12.

14) Vergl. auch H. G. Zeuthen, Sur l'origne historique de la connaissance des quantités irrationalles, p. 356, Nr. 2.

15) So lautet z. B. der 16. Satz des XIII. Buches: „Ein Ikosaeder in eine gegebene Kugel zu konstruieren und zu beweisen, daß die Seite desselben irrational und eine sog. Minor sei." Auch die Seite des regelmäßigen Fünfecks in einem Kreis mit rationalem Radius ist eine Minor (Satz 11), und der größere Teil einer nach dem goldenen Schnitt geteilten Linie ist eine fünfte Apotome (nicht bloß „Apotome", wie in der Ausgabe Heibergs, Vol. IV, p. 262—263 irrtümlich steht), der kleinere eine erste Apotome (Satz 6).



Diese Ausdrücke unterscheiden sich in ihrer Form wesentlich voneinander, und Euklides mußte also darauf bedacht sein, weil ihm unsere algebraische Formelsprache fehlte, auf geometrischem Wege Mittel zu finden, diese verschiedenen Formen durch Konstruktion herauszubringen und ihnen ihren Eigenschaften entsprechende Namen zu geben. Wenn nun P. Tannery (in Mémoires de la société des sciences de Bordeaux, Sér. II, T. 4, S. 402) und S. A. Christensen (in Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 34, hist.-liter. Abteilung, S. 213 und 217) die Ansicht aussprechen, Euklides habe im X. Buche hauptsächlich bezweckt die Lösung von Gleichungen 4. Grades vorzubereiten bezw. sie geometrisch zu lösen, so ist dies entschieden zu weit gegangen. Allerdings kommen unter den irrationalen Größen, und zwar unter den Binomialen und Apotomen, Formen vor, die als Auflösungen von Gleichungen 4. Grades von der Form $x^4 \pm px^2 \pm q = o$ oder, wie Christensen S. 209 sagt, als Auflösungen der beiden quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten: $x^2 + y^2 = a$ und $xy = b$ betrachtet werden können. Mit der letztern Auffassung könnten wir uns eher befreunden; denn aus diesen Gleichungen ergeben sich sofort $x + y$ und $x - y$ und hieraus dann x und y, ohne daß man auf eine Gleichung 4. Grades zu stoßen braucht; an eine solche hat gewiß Euklides bei Aufstellung und Beweis seiner Lehrsätze nicht gedacht. Man soll diese alten Theorien und Anschauungen nicht zu sehr modernisieren und darin Zwecke herausfinden wollen, die sie kaum gehabt haben können.

Zum Schlusse fühle ich mich trotz meiner Bemerkungen auf S. 9 u. folgende in meiner Einleitung verpflichtet, noch eine Meinung mitzuteilen, die sich mir bei näherem Studium einzelner Stellen des Kommentars und ihrer Vergleichung mit den Lehren der Hauptvertreter des Neuplatonismus, wie Plotin, Porphyrius und Proklus, über die Seele aufgedrängt hat, wenn auch dadurch ein dritter Mitbewerber um die Autorschaft dieses Kommentars auf den Plan tritt, was mir freilich die Freude, die ich an meiner Übersetzung dieser Arbeit bis jetzt gehabt habe, etwas zu trüben imstande ist: Es wäre nicht unmöglich, daß Proklus der Verfasser des Kommentars wäre, da ja die Frage, ob dieser Gelehrte nur das 1. Buch des Euklides oder das ganze Werk kommentiert habe, immer noch eine offene ist. Es ist nämlich zuzugeben, daß die Mehrzahl der Stellen des arabischen Originals, wo der Name des Verfassers vorkommt (und zwar in der Form bls oder bbs), eher auf ein l in der Mitte als auf ein b schließen lassen, und es wäre möglich, daß es ursprünglich sogar brkls geheißen hätte, allerdings wäre dann das Wort durch Wegfall des rk etwas stark verdorben worden, was freilich bei der so häufig vorkommenden Verstümmelung griechischer Eigennamen durch arabische Übersetzer keinen Grund gäbe, die Lesart brkls fallen zu lassen. — Wer die Autorschaft des Proklus nicht zugeben will, und zu diesen wird sehr wahrscheinlich Herr Prof. Heiberg in Kopenhagen gehören, kann sich vielleicht mit der Ansicht befreunden, daß der Kommentar in seinem Hauptteil von Pappus verfaßt ist, daß aber von Proklus selbst (oder nach ihm von andern) Zusätze, und zwar hauptsächlich philosophische, zu diesem Kommentar gemacht worden sind, die von dem arabischen Übersetzer als von Pappus herstammend betrachtet worden sind. Ich sage mit den Arabern: wa Allâhu a'lamu = Gott weiß es besser.



Über die Projektion der Sternbilder und der Länder

von ***Al-Bîrûnî.***

Neben anderen astronomischen Gegenständen hat sich der große arabische Gelehrte al-Bîrûnî auch vielfach mit dem Astrolab beschäftigt, so vor allem in dem Werk „Eingehende Behandlung aller möglichen Methoden für die Herstellung des Astrolabs". Eine wertvolle Schrift über den Gegenstand ist auch diejenige über die Projektion der Sternbilder und das Ebenmachen der Länder fî tasṭîḥ al ṣuwar wa tabṭîḥ al kuwar[1]). Von ihr ist in Leyden eine anonyme Handschrift vorhanden. Daß diese von al-Bîrûnî herrührt, folgt einmal daraus, daß sich die in ihr enthaltenen Betrachtungen zum Teil an diejenigen am Schluß seiner Chronologie (s. w. u.) anschließen, und daraus, daß sie in dem von ihm selbst verfaßten Verzeichnis zur Chronologie (Einleitung XLIV und XLVI; H. Suter und E. Wiedemann a. a. O., S. 74, V, 3 und XIII, 7) aufgeführt ist.

Die Handschrift ist die 15. des Mss. 1068 (cod. 14 (15) Gol.), S. 300—314. Der dritte Band des Katalogs der Leydner Universitätsbibliothek No. 1065, S. 96 hat unrichtig „sunt 29 pp." statt 15 pp. Die Handschrift ist recht flüchtig gemacht, sie weist verschiedene Lücken auf, enthält Wiederholungen von Sätzen, undeutlich und unrichtig geschriebene Wörter, öfters fehlen die diakritischen Punkte oder sind unrichtig gesetzt, und von den vier Figuren enthält der Text nur die erste, die drei anderen habe ich teils nach denen in der Chronologie, teils nach dem Wortlaut des Textes ergänzt. So war die Übersetzung keine leichte Arbeit, und ich war genötigt, hie und da die Wiedergabe einer Stelle zu unterdrücken, was glücklicherweise für das Verständnis des Zusammenhanges ohne Einfluß war. Im folgenden gebe ich eine Übersetzung der obigen Schrift, der eine Reihe von Bemerkungen am Schluß beigefügt ist.

---

1) Abu'l-Raiḥân al-Bîrûnî war einer der größten Gelehrten der Araber auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften, der Philosophie und der Völkerkunde. Er lebte von 973 bis 1048 und stand die meiste Zeit seines Lebens im Dienste Maḥmûds von Ghazna, des Beherrschers von Chwârezm (des heutigen Chiwa), den er auf seinem Feldzug nach Indien begleitet hat, und über welches Land und Volk er seine indische Chronik geschrieben hat. Eine englische Übersetzung dieses Werkes gab E. Sachau 1888 in London heraus unter dem Titel „Alberuni's India"; 1910 erschien am selben Orte eine Neu-Ausgabe. (Vergl. auch H. Suter, Mathematiker und Astronomen der Araber, S. 98ff.) sowie H. Suter und E. Wiedemann, Beiträge LX.

Übersetzung.

Über das Ebenmachen (die Projektion) der Sternbilder und die Ausbreitung der Länder (d. h. deren Projektion).

Die Kenntnis der Sternbilder, die die beobachteten Sterne umfassen aus dem reichen Schmucke des Himmels, und die als Zeichen hingesetzt sind für die mit Überlegung Beobachtenden und als Wegweiser für die zu Land und zu Wasser Umherwandernden, ist von nicht geringem Nutzen in beiden Gebieten der Astronomie: Erstens in der Wissenschaft der Sphären und der Gestirne und ihrer Bewegungen und in dem, was von den ersten Beobachtungen an zu dem gehört, dessen der bedarf, der ihre Höhe und ihre Entfernungen kennen will und die genauen Zeiten in den Nächten auf der Pilgerfahrt und die Größe der Bewegungen und das Maß der vergangenen und zukünftigen Zeit derselben und die Festsetzung des Wiederkehrens in den exzentrischen Sphären [der rückläufigen Bewegungen[2])] und die Vergleichung [der Bewegung] der übrigen Gestirne mit ihnen und Ähnliches. Zweitens in der Kunst der Astrologie für die Kenntnis der Einflüsse der obern Himmelskörper auf die untern, von dem Alltäglichen (Notwendigen) an, das hierin jeder wissen muß, bis zur Kenntnis ihrer Erhöhungen und des Wesens ihrer Temperamente und ihrer Farbe und ihrer (der Planeten) Stellungen zu den Sternbildern, die für die Horoskope nötig sind, und ihrer Konversionen und der Konversionen für die Jahre der Welt und des Eintretens der Konjunktionen und Oppositionen. Und [drittens] ist sie (die Kenntnis der Sternbilder u. s. w.) auch von Nutzen für die gemeinen (alltäglichen) Kenntnisse über die Bestimmung der Jahreszeiten in ihrer Verschiedenheit der Aufeinanderfolge der Abschnitte und für die Kenntnis der natürlichen Veränderungen, die sich im Laufe der Jahre fast in der gleichen Ordnung ereignen, wie z. B. in Bezug auf Wasser und Land, auf Trockenheit und Feuchtigkeit, auf das gleichmäßige oder nur vereinzelte Auftreten solcher mit Nebeln (Dünsten), die nur nach den Orten verschieden sind, wie die Regenstürme und die heißen Winde, die große Hitze und die große Kälte, die heißen Julitage und die Tage der Altweiberkälte und Ähnliches, wie es die Griechen, die Inder und die Araber kennen; ferner für die Kenntnis der Befruchtungszeiten bei den Vierfüßlern und das Pflanzen der Sträucher und Bäume und das Säen der Saaten; ebenso für die Kenntnis der Zeiten, in denen die Meere stärker werden und aufgeregt sind und über die Ufer treten (?), und für die Kenntnis der gegenseitigen Lage der Orte auf der Erde, der Berge, der Meere, der Flüsse und ihrer Richtungen und des Einschlagens des nächsten Weges und seiner Auffindung für die Entsendung von Soldaten und Karawanen und für die Kenntnis der Richtungen von einem Ort zu einem andern, teils in Bezug auf das Wegziel, teils in Bezug auf die Richtung

2) Rugû‘ bedeutet die rückläufige Bewegung des Planeten, die durch dessen Bewegung auf dem Epizykel bedingt ist. Die Mafâtih al ‘Ulûm definieren S. 221 (vergl. Beiträge XLVII, 225, No. 41): Rugû‘ der Planeten ist deren Wanderung in der Länge entgegengesetzt der Reihenfolge der Tierkreiszeichen.



nach Mekka (die Qibla) nach den Vorschriften des Gesetzes in den Büchern Gottes und seiner Propheten. — Selten wird einer gefunden, der mit eigenen Augen die Kenntnis aller dieser Dinge sich zu eigen gemacht hat, so daß auf jedes derselben ein Zeichen hinweist, das den Fragenden befriedigt und den Suchenden zur Wahrheit leitet. Auch ich habe das meiste, was ich über diese Dinge sage, aus den Büchern entnommen, die sich besonders mit solchen Fragen beschäftigen, wie z. B. das Buch des ʻUṭârid b. Muḥammed „über die Sorge (Mühe)[3]) der Astronomen“, das Buch des ʻOmar b. al-Farruchân al Ṭabarî „über die Abbildung der Himmelskugel“[4]), das Buch des Abu'l-Ḥosein al-Ṣûfî (903—986) „über die Fixsterne“[5]), und die Bücher der asḥâb al anwâ'[6]), gemalt nach der Methode der Araber. Aber es ist klar, daß die in diesen Büchern gemalten Bilder, auch wenn ihre Abbildung und Beschreibung genau war [ursprünglich], doch durch die Zahl der Manuskripte und die Häufigkeit der Abschriften verändert wurden und nicht im ursprünglichen Zustand verblieben, sondern verdorben und unrichtig wurden. Und wenn auch die Übertragung mit dem Zirkel und dem Lineal und besonders fein gemacht wäre, so sind eben doch die Bilder in diesen Büchern vereinzelt, voneinander getrennt, nicht alle neben einander gezeichnet, so daß zu ihrer Kenntnis und zum Verständnis der Art und Weise ihrer gegenseitigen Stellungen die Vergleichung des einen mit dem andern beständig nötig ist. Wenn nun aber eine vorzügliche Übertragung von dem, was in den Büchern und den für sie komponierten Tafeln von den Lagen dieser Gestirne erwähnt wird, auf Kugeln aus irgend einer Substanz gemäß dem, was im Buche über die Konstruktion der Himmelskugel erklärt ist, ausgeführt wurde[7]), so ließe das das in diesem Buche soeben Erwähnte in keiner Hinsicht im Stiche, und es würde dem Auge als Gesamtbild sich darbieten und nicht in vereinzelten Bildern. Aber es ist ja wohl einzusehen, daß dies nicht gut angeht auf kleinen Kugeln, dagegen wohl auf größern; aber diese sind selten und kostbar und zu groß für das Tragen und den Transport auf der Reise wie auch für den Ge-

3) miḥna; dieses Buch wird im Fihrist und bei Ibn al-Qifṭî nicht erwähnt; vergl. Suter, Die Math. und Astronomen der Araber, S. 67. Bei der Wissenschaft von den Fixsternen sagt Ḥ. Chalfa IV, 113: „Ein Werk darüber ist ṣuwar al kawâkib, Konstellationen der Fixsterne, das der gewissenhafte Forscher Abu'l-Ḥusain ʻAbd al-Rahmân Ibn ʻOmar al-Ṣûfî für ʻAḍud al-Daula verfaßte. Er sagt, daß er zwei Werke über die Bilder der Fixsterne sah, das eine rührte von al-Battânî, das andere von ʻUtârid her“ (vergl. auch Description des étoiles fixes par ʻAbd al-Raḥmân al Ṣûfî, traduction par H. C. F. Schjellerup S. 30).

4) Auch dieses Buch wird von den genannten Autoren nicht erwähnt, vergl. Suter a. a. O., S. 7.

5) Vergl. Suter a. a. O., S. 62.

6) Unter dem Nau', Pluralis anwâ', versteht man nach den Mafâtîh al ʻUlûm den heliakischen Untergang einer Mondstation und den gleichzeitigen Aufgang einer ihr gegenüberliegenden. Hiernach wurden dann die meteorologischen Vorgänge bestimmt (vergl. Beitr. LVII, 222; E. Wiedemann, Naturschilderungen bei al Hamdânî, Beitr. zur Kenntnis des Orients 7, 18. 1909, al-Bîrûnî, Chronologie, Text S. 243 und 339, Übersetzung 231 und 339). asḥâb al anwâ' sind die Verfasser der Werke über die anwâ'.

7) Diese Stelle ist im Text jedenfalls verdorben, und es ist ungewiß, ob der Sinn richtig getroffen wurde.



brauch und die Besorgung[8]), so daß die Schwerfälligkeit des Gebrauches dieser Instrumente ihren Nutzen aufwiegt, ja sogar übertrifft.

Wenn nun aber diese Sterne und ihre Bilder auf die Ebene übertragen werden, so wird, was beschwerlich wäre mit den Kugeln, nun leichter mit Hilfe der Ebene; aber die Hauptsache dieser Abbildung ist, daß sie dem auf der Kugel [Beschriebenen] ähnlich werde[9]). Wenn du das Buch des Ptolemäus, betitelt die Geographie, genauer studierst, besonders das, was er von Hipparchus[10]) berichtet über die richtige Anleitung zur Abbildung der Erdoberfläche (wörtl. „Bilder der Erde") auf eine Ebene, und von der Zeichnung der zum Äquator parallelen Kreise und der auf ihnen senkrecht stehenden Längenkreise [so wirst du sehen][11]), daß er behauptet, daß der Durchschnitt des Längenkreises des gesuchten (d. h. darzustellenden) Ortes mit seinem Breitenkreis auch sein (richtiger) Ort auf der Zeichnungsebene sei; es ist also für den Denkenden klar, daß die totale Länge, also die Hälfte jedes Parallelkreises, [besonders] für einen Ort in der Nähe eines der beiden Pole, wohl in Bezug auf die Zahl der Grade gleich ist dem [halben] Äquator, aber nicht ihm ähnlich ist, wie dies bei den Parallelkreisen auf der Kugel der Fall ist, ebenso daß du die Breiten auf parallelen Linien abmissest (im Text: findest), während sie [in Wirklichkeit] auf unter sich nicht parallelen Linien sich befinden, denn sie schneiden sich insgesamt in zwei Punkten: dies ist ein Widerspruch. Auf die gleiche Weise verfährt Muḥammed b. Ǵâbir al-Battânî in seinen Tafeln, wo er die Richtung der Qibla und den Ort Mekkas auf der Ebene des Horizonts finden will; er trägt von dem Ende der Ost-Westlinie (im Text: Äquator), das Mekka näher ist, auf dem Umfange des Kreises[12]) den Unterschied der Breiten der beiden Orte (von Mekka und des Beobachtungsortes) ab, und zwar gegen Süden, wenn die Breite von Mekka kleiner ist als die des Ortes, dagegen gegen Norden, wenn die Breite von Mekka größer ist, dann zieht er durch den Endpunkt dieser Abtragung eine Parallele zur Ost-Westlinie; hierauf trägt er von dem Ende des Meridians [des Ortes], das auf der gleichen Seite mit dem Ende der vorigen Abtragung liegt, den Unterschied der Längen der beiden Orte ab auf die Seite, nach der Mekka liegt, und zieht eine Parallele durch den Endpunkt dieser Abtragung zum Meridian und behauptet dann, wo sich die Breiten- und die Längenlinie (d. h. die beiden gezogenen Parallelen) schneiden, sei der Ort von Mekka auf der Ebene des Horizontes[13]). Damit fand er außer der Richtung der Qibla auch noch die

8) D. h. jedenfalls, die Bilder auf einmal seien zu wenig übersichtlich.

9) Der Satz „aber die Hauptsache . . . ähnlich werde" ist im Text, wenigstens in seinem Anfang, verdorben, aber ich glaube, den richtigen Sinn getroffen zu haben.

10) Der Text hat Fârabius.

11) Hier und im folgenden ist der Text wieder stark verdorben durch Auslassungen und Wiederholungen.

12) Es ist dies ein Kreis mit beliebigem Radius um den Ort, wo man die Qibla bestimmen will, beschrieben.

13) Es ist dies die Darstellung, wie sie in der Ausgabe der Tafeln von al-Battâni durch Nallino (arab. Text III, 206—207, lat. Übers. I, 136—137) sich findet.



Entfernung [von Mekka bis zum Beobachtungsort]. Das ist nun für die Konstruktion des Azimutes der Qibla ein starker Fehler, und es tadelten ihn deshalb auch alle Gelehrten, die über diesen Gegenstand geschrieben haben, wie z. B. Abû Sa'îd Aḥmed b. Muḥammed b. 'Abdelǧalil und Abû Manṣûr 'Alî b. 'Irâq[14]) und Abû Maḥmûd Ḥâmid b. al-Chiḍr al-Chogendî[15]). — Dieses bewog mich zur Befestigung der Grundlagen für die ebene Darstellung dessen, was auf der Himmelskugel an Sternen und Sternbildern, und dessen, was auf der Erdkugel an Städten, Bergen, Meeren, Flüssen und anderem sich befindet, damit der, welcher sich um diese Dinge kümmert, sich auf sie (meine Darstellung) stützen kann und nicht an anderes sich zu halten braucht. Ich bemerke, daß denjenigen, die sich mit astronomischen Instrumenten, ihrer Konstruktion und Verifikation beschäftigen, wenn sie wenigstens einen Einblick in die Astronomie und einen reichlichen Gewinn aus der Geometrie erlangt haben, bekannt sein wird, daß die Punkte und die Kreise auf der Kugel nur dadurch auf Ebenen projiziert werden können, daß durch sie gerade Linien gezogen und gerade oder schiefe Kegelflächen oder Zylinderflächen oder Flächen unvollkommener Körper (d. h. deren Grundflächen nicht Kegelschnitte, sondern unklassifizierte Kurven sind) gelegt werden. Was die geraden Linien und die Kegelflächen anbetrifft, so sind dies diejenigen, die bei der Konstruktion der Astrolabien zur Verwendung kommen (auftreten), und je nachdem die Spitzen der Kegel und die Ausgangspunkte der geraden Linien im Norden oder Süden liegen, unterscheidet man südliche oder nördliche Astrolabien, und je nachdem sie auf der Achse, und zwar in den beiden Polen oder zwischen ihnen oder außerhalb davon, liegen, verwandeln sich die Kreise, die auf die Ebene projiziert werden, in verschiedener Weise und werden zu geraden Linien oder zu Kreisen oder zu Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln. Und notwendig muß auch bekannt sein, daß Kreise, die auf der Kugel gleiche Entfernung haben, auf die Ebenen projiziert werden entweder mit verschiedener Entfernung, aber parallel unter sich oder mit verschiedener Entfernung und nicht parallel unter sich[16]); so werden dieselben Entfernungen an gewissen Orten enger, an andern Orten weiter. Und da dies sich nun so verhält, so existieren auf dem Bilde nicht die gleichen Entfernungsverhältnisse wie auf der Kugel, außer in dem Falle, wo die Projektionsebene die abzubildende Fläche in der Mitte (?) berührt und die Spitze der projizierenden Kegelfläche [ziemlich weit] außerhalb in der Verlängerung des auf der Projektionsebene senkrecht stehenden Durchmessers

14) Der richtige Name ist: al-Manṣûr b. 'Alî b. 'Irâq, Abû Naṣr, vergl. Suter, a. a.O., S. 81. Die Vorwürfe, die hier al-Battâni gemacht werden, sind nicht ganz richtig; dieser wollte wohl nur ein einfacheres, angenähert richtiges Verfahren für die Praktiker angeben; vergl. Nallino, al-Battânî, I, 318. Vergl. zu ihm Beiträge LX, 78 u. 90 u. LXI, 119.

15) vergl. Suter a. a. O., S. 74.

16) Die Parallelkreise zum Äquator bilden sich bei der Projektion als konzentrische Kreise mit verschiedenen Radien ab. Alle anderen unter sich parallelen Kreise auf der Kugel bilden sich weder als äquidistante Kegelschnitte ab noch als solche mit dem gleichen Mittelpunkt.

17) Darunter sind parallele Kreise zum Äquator verstanden, die von dem Pol, in dem die Projektionsebene die Kugel berührt, nicht weit abstehen. Liegt der Projektionspol weit



liegt[17]). In diesem Falle ist also der Unterschied [zwischen Kugelbild und ebenen Bild] sehr gering, aber sobald das Bild näher gegen die Spitze des Kegels hin liegt, ist der Unterschied größer.

Es ist aber die Übertragung von der Kugel auf eine Ebene noch auf einem andern Wege möglich, den Abu'l-'Abbâs al-Farġânî in einer Anzahl von Exemplaren (Abschriften) seines Buches al-kâmil[18]) dem Ja'qûb b. Isḥâq al-Kindi zuschreibt, in andern aber dem Châlid b. 'Abdelmelik al-Merwarrûdhî[19]), es wird diese Übertragungsart das Astrolabium al-mubaṭṭaḥ[20]) genannt. Es findet sich auch von al-Ḥasan (?)[21]) eine kurze Abhandlung (wörtl. Buch) über seine Konstruktion, und die Vertreter dieser Kunst unterscheiden hierin zwei Arten, das Mustamġan (?)[22]) und das Mustamḥan (= das Erprobte); was das Mustamġan anbetrifft, so verwirft (leugnet) er (al-Ḥasan?) es durchaus und erklärt sich unwissend über seinen Erfinder (Urheber), wie auch al-Farġânî tut; was das Mustamḥan[23]) anbetrifft, so behaupten einige, daß bei ihm die Kugel an einem ihrer Pole abgeplattet (eben), am andern gespaltet (zerplatzt?)[24]) angenommen werde, andere sagen, daß zwischen diesem Astrolabium und der erwähnten Projektion keine Gemeinschaft bestehe, aber es kursieren doch (?) fertige Instrumente [dieser Art] zur Auffindung der Aszendenten und der Höhen, wie die Sonnenuhren und andere[25]). — Ich habe eine dritte Ansicht über dieses

---

außerhalb der Kugel auf der Weltachse, so ist der Öffnungswinkel des projizierenden Kegels, der auf einem dieser Parallelkreise aufsteht, sehr klein. Für sehr kleine Winkel darf aber der Bogen — der Abstand des Parallelkreises vom Berührungspunkt — mit der Tangente, der Projektion dieses Bogens, vertauscht werden. Wegen der Proportionalität der Tangente kleiner Winkel ist die Differenz der Radien der Projektion zweier solcher Kreise gleich dem Unterschied ihrer Abstände auf der Kugel vom berührenden Pol.

18) Vergl. Suter a. a. O., S. 19; es ist dies jedenfalls das Buch, das über die Konstruktion des Astrolabiums handelt, und das noch in Berlin (Nr. 5790—92 des Katalogs von Ahlwardt) und wahrscheinlich auch in Paris (Nr. 2546, 5° des Katalogs von de Slane) vorhanden ist.

19) Dies ist jedenfalls das richtige, denn al-Kindî ist jünger als al-Farġânî, also wird letzterer kaum Arbeiten des ersteren angeführt haben.

20) Ich lese „mubaṭṭach melonenförmig" statt „mubaṭṭaḥ ausgebreitet", da aus dem folgenden hervorgeht, daß es sich um eine Projektion wie beim melonenförmigen Astrolab (al mubaṭṭach) handelt. Für die in der Arbeit von E. Wiedemann und J. Frank, Beiträge LXI, 103 benützte und begründete Lesung mubaṭṭach und nicht mubaṭṭaḥ spricht auch der Titel eines Werkes, der im Katalog der Pariser Handschriften von G. de Slane (No. 2457, 30) aufgeführt ist. Er heißt: Werk über die Anwendung des Astrolabs mubaṭṭach nach der Angabe von Abû Ga'far Aḥmed b. 'Abd Allâh (vergl. H. Suter, Die Mathematiker und Astronomen der Araber u. s. w. Abhandlungen zur Geschichte der mathem. Wissenschaften Heft X. S. 102. 1900). Zu dem Astrolab al mubaṭṭach und dessen Konstruktion vgl. J. Frank, Sitzgsber. der phys.-med. Soz. zu Erlangen **50/51**, 275. 1918/19.

21) Ob dies Wort überhaupt den Eigennamen al-Ḥasan bedeutet, ist zweifelhaft.

22) Dieses Wort ist verdorben: maġana = dick, grob sein, hat nach den Lexika keine 10. Form.

23) Hier liest man dieses Wort eher mustaḥsan = schön oder gut erfunden.

24) Das Wort im Text liest man am leichtesten und richtig munfataqa = zerspalten.

25) Die ganze Beschreibung dieser Astrolabien ist verdorben, auch das folgende über die eigene Ansicht al-Bîrûnîs ist unsicher.



Astrolabium, daß es nämlich, wie ich fest glaube, eine von den oben erwähnten Arten der Kegelprojektion (stereograph. Proj.) sei, über seine Konstruktion und richtige Erklärung werde ich später eine Schrift verfassen, so Gott will. Für jetzt sage ich, daß die Projektion des Mubaṭṭach nur jeweilen ausgeführt werden kann für eine der beiden Hälften der Tierkreissphäre, entweder die nördliche oder die südliche, und es wird dann die eine Hälfte an die andere angeschoben[26]), sobald man die ganze Sphäre wünscht[27]); dann begnügt man sich also mit der Abbildung jeder Hälfte der Sphäre auf je einem Bilde für sich. So werden also die größeren, nützlicheren und für die Beobachtung notwendigsten Sternbilder, ich meine diejenigen, die sich um den Tierkreis und den Äquator herum befinden, zerschnitten und verteilt auf zwei [getrennte] Hälfte, und das ist allerdings weit entfernt von dem Gewünschten.

Was die Zylinderprojektion (Orthogonalproj.) anbetrifft, so kommt mir davon wieder einiges von dem vielen in den Sinn, was al-Farġânî darüber am Ende seines Buches bei Anlaß der Widerlegung des Mubaṭṭach-Astrolabiums schwatzt (faselt); ich bin der Meinung, daß mir hierin der Vorrang gebührt, denn ich nannte es zuerst die Zylinder-Projektion[28]) (vielleicht ist dies nicht deutlich ausgedrückt)[29]); es ist eine mittlere Projektionsart, nicht eine nördliche und nicht eine südliche, durch sie ist es möglich, alle Sterne der ganzen Sphäre auf die Ebene des Äquators oder auf die Ebene irgend eines andern größten Kreises

---

Welches Astrolab unter mustamġan und mustamḥan zu verstehen ist, ist zweifelhaft. Al-Farġânî wendet sich in seinem Buche al-kâmil (s. E. Wiedemann u. J. Frank a. a. O., S. 106) gegen ein melonenförmiges Astrolab, das durch Abbildung der ganzen Himmelskugel auf eine Bezugsebene stattfindet. Hiebei werden beim Astrolab, bei dem der Nordpol der gemeinsame Mittelpunkt in der Abbildung ist, die Verhältnisse in der Nähe des Südpoles unverhältnismäßig stark vergrößert. Diesem selbst entspricht ein Kreis. Aus dem Zusammenhang könnte man also entnehmen, daß unter mustamġan das durch Abbildung der ganzen Himmelssphäre entstandene melonenförmige Astrolab gemeint sei. Das Mustamḥan dürfte dagegen das melonenförmige Astrolab sein, das entweder durch Abbildung der nördlichen oder der südlichen Halbkugel entsteht. (Siehe im Text weiter unten.) Damit dürfte der Satz im Einklang sein „andere sagen, daß zwischen diesem Astrolabium u. s. w.“ der sich mit ganz ähnlichen Worten im kitâb al-istî'âb (E. Wiedemann und J. Frank a. a. O., S. 105) findet. Man könnte auch annehmen, daß mit mustamġan und mustamḥan Mischformen von zwei einfachen melonenförmigen Astrolabien bezeichnet werden, die ähnlich zusammengesetzt sind wie die gewöhnlichen Mischastrolabien.

26) Neben einander gelegt.

27) Auch hier ist der Text verdorben, ich konnte keinen andern Sinn herausfinden.

28) Das Wort „Zylinder“ fehlt im Text, doch „Projektion“ allein hätte keinen Sinn, der ganze Satz von „ich bin der Meinung“ an ist übrigens sehr wahrscheinlich verdorben.

29) Dieser eingeschobene Satz lautet, wie er im Texte steht, wörtlich: vielleicht ist dies nicht sein Ort, aber dies gibt keinen Sinn, ich habe daher mauḍi'ha (sein Ort) durch múḍaḥan ersetzt, dann kann man, wie ich oben getan habe, übersetzen.

Dieser Mißstand ist bei dem melonenförmigen Astrolab vermieden, das al-Bîrûnî im kitâb al-istî'âb beschreibt. (s. Frank a. a. O., S. 294 u. ff.) Auf diese Art der Lösung weist al-Bîrûnî auch in der Chronologie (Übersetzung S. 359) hin. In wie weit dieses für eine genaue Bestimmung der Zeit der Abfassung dieser drei Schriften von Bedeutung ist, müssen spätere Untersuchungen lehren.



zu projizieren, aber dabei häufen sich die nördlichen und südlichen Bilder zusammen (fallen aufeinander), und die mehr am Umkreis der Projektionsebene liegenden sind sehr zusammengedrängt, so daß oft nördliche und südliche Sterne zusammenfallen und dem Auge als eins erscheinen. Was aber die Richtungen von ihnen nach dem Mittelpunkt des Projektionskreises und die [gegenseitigen] Entfernungen der weiter vom Umfange abliegenden anbetrifft, so stellen sie sich nahezu richtig dar.

Ich hörte den Abû Sa'îd Aḥmed b. 'Abdelgalîl (al-Sigzî)[30], den Geometer, von Abu'l-Ḥosein al-Ṣûfî erzählen, daß dieser sehr zartes Papier auf die Kugel (den Globus) legte und es ihrer Oberfläche sehr genau anpaßte; dann zeichnete er darauf die Sternbilder und einzelne Sterne durch, wie er sie je nach der Durchsichtigkeit (des Papieres sah; je nach der Größe der Sternbilder[31]) fiel nun dieses [Verfahren] genauer oder weniger genau aus. Er, nämlich al-Ṣûfî, behauptet dann an einer Stelle seines Buches, daß man bei einer Anzahl von Sternbildern einen Unterschied bemerke zwischen den Bildern am Himmel und denen auf der Kugel, und zwar wegen eines Fehlers in den Tafeln des Almagest, nach denen die Kugel verfertigt worden sei; aber bei meinem Glauben! wenn dieser leichte Fehler auf der Kugel den Augen kaum bemerkbar wird, so erkennt man ihn noch viel weniger auf der ebenen Fläche [des Papiers][32]), welche sich der Wölbung (Krümmung) der Kugel nicht vollständig anschmiegt, sondern an gewissen Stellen gefaltet und gebogen werden muß; wenn es (das Papier) dann wieder in eine Ebene ausgebreitet wird, so wird auch das Gefaltete und das Gebogene wieder eben. Wenn nun diese erwähnten Bilddarstellungen starke Unterschiede aufweisen, je nachdem sie auf der Kugel oder auf einer Ebene ausgeführt sind, so müssen wir einen besondern Weg einschlagen (wörtl. eine List anwenden), der die beiden Dinge (d. h. das Bild auf der Kugel und das auf der Ebene) einander näher bringt, und wenn sich kein rationales Verhältnis zwischen der geraden Linie [der Ebene] und der gekrümmten [auf der Kugel], also auch nicht zwischen der ebenen Fläche und der gekrümmten auf der Kugel finden läßt, so ist für uns eine genaue Übertragung eben unmöglich[33]).

Wenn[34]) wir nun eine Übertragung der Sternbilder der Sphäre auf eine Ebene vornehmen wollen, so beschreiben wir um den Mittelpunkt E den Kreis ABGD für die halbe Sphäre, welche vom Anfang des Widders bis zum Ende der Jungfrau reicht, und teilen ihn in vier Quadranten durch die Durchmesser AG und BD; der Punkt A sei der Anfang des Widders und der Punkt G das Ende der Jungfrau und B im Süden und D im Norden. Dann teilen wir jeden

30) Vergl. Suter a. a. O., S. 80. Mit ihm hat, wie aus dem großen Werk über die Astrolabien hervorgeht, al-Bîrûnî in engster Beziehung gestanden.

31) Sollte wohl heißen: „je nach der Menge der Sterne", dieser Satz enthält Fehler.

32) D. h. wohl: man kann ihn nicht schätzen, weil aus dem Falten des Papiers sich noch größere Fehler ergeben.

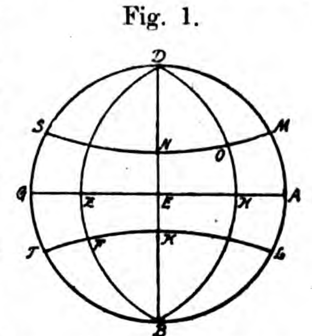
33) Der letzte Satz ist frei übersetzt, wörtlich lautet er: so tritt zwischen unsere Darstellung und die genaue etwas Hinderndes.

34) Hier beginnt nun die eigene Darstellungsart al-Bîrûnîs.



Quadranten in 90 gleiche Teile und ebenso jeden der vier Halbmesser in 90 gleiche Teile; dann verlängern wir beide Durchmesser über den Kreis hinaus und suchen auf AE sowohl als auf EG Mittelpunkte von Kreisen, die alle durch B und D und durch jeden Teilpunkt des Durchmessers gehen; ebenso suchen wir auf beiden Teilen von BD[35]) Mittelpunkte von Kreisen, die alle durch die Teile des Durchmessers (BD) und zugleich durch die entsprechenden Teile der beiden Quadranten gehen; z. B. es sei AH ein Teil von den 90 Teilen von AE, so suchen wir auf der Linie GE den Mittelpunkt eines Kreises, der durch die Punkte DHB geht; wenn wir ihn gefunden haben, so beschreiben wir mit derselben Zirkelöffnung auch auf der andern Seite den Kreis DZB; diese Kreise werden Längenkreise genannt. Ebenso nehmen wir jeden der beiden Bogen AM und GS gleich dem entsprechenden Teile EN des Radius DE an und suchen auf ED (d. h. ihrer Verlängerung) den Mittelpunkt des Kreises, der durch die Punkte M, N, S geht; haben wir ihn gefunden, so beschreiben wir mit derselben Zirkelöffnung auch auf der andern Seite den Kreis LKT, diese Kreise werden Breitenkreise genannt. Wenn wir dies gemacht haben für jeden Teil, so haben wir im ganzen 178 Breiten- und 178 Längenkreise außer den beiden Linien AG und BD. — Nun nimmt man von jedem Stern, dessen Länge zwischen dem Anfang des Widders und dem Ende der Jungfrau liegt, die Zahl seiner Längengrade und trägt die gleiche Zahl Teile von A aus auf dem Durchmesser AEG ab und beschreibt durch den Endpunkt der Abtragung den Längenkreis dieses Sternes[36]). Dann nimmt man die Zahl seiner Breitengrade und zählt die gleiche Zahl Teile auf seinem Längenkreis [vom Durchmesser AG aus] ab und zwar nach D hin, wenn die Breite nördlich, und nach B hin, wenn sie südlich ist. Das Ende dieser Abtragung bezeichnet den Ort der Sternes[37]). — Wenn wir aber wünschen, daß die Sternbilder um die beiden Äquinoktialpunkte, d. h. um den Anfang des Widders und das Ende der Jungfrau nicht zerrissen (getrennt) sich darbieten, so machen wir neben den beiden erwähnten Bildern (Halbkugeldarstellungen) noch zwei andere: in dem einen nehmen wir den Punkt A als Anfang des Sternbildes des Krebses [und den Punkt G als Ende des Schützen] an und im andern den Punkt A als Anfang des Sternbildes des Steinbocks [und den Punkt G als Ende der Zwillinge]. — Die Größe der Sterne wird aus den Büchern (Tafeln) entnommen, und sie werden diesen Angaben entsprechend in die Bilder gezeichnet. Was ihre Temperamente (Qualitäten) anbetrifft, so werden sie durch Farben ausgedrückt, entsprechend den

Fig. 1.



35) Eigentlich auf ihren Verlängerungen.

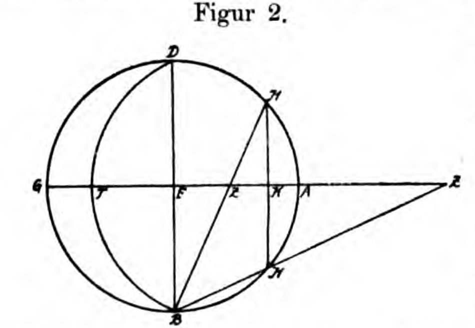
36) Ich übersetze hier ziemlich frei, um die breite Darstellungsweise des arabischen Autors etwas zu kürzen.

37) Hier folgen nun zwei Beispiele, und zwar erstens der Stern O mit 1° Länge und 1° nördl. Breite und zweitens der Stern F mit 179° (29° der Jungfrau) Länge und 1° südl. Breite, womit allerdings die Zeichnung nicht stimmt. Dann folgt die gleiche Darstellung (nur wesentlich kürzer) für die andere Halbkugel vom Anfang der Wage bis zum Ende der Fische; beides lassen wir der Kürze halber weg.

Farben der Planeten (bezw. ihrer Metalle), es werden aus diesen Farben Mischungen hergestellt für jeden Stern nach Maßgabe dessen, was von seinen Qualitäten gesagt wird; nachdem dies gemacht ist, wird der freie Raum zwischen ihnen (den Sternen) mit [Farbe von] Lapis Lazuli bestrichen, ähnlich dem Blau, in dem der Himmel dem Auge erscheint; hierauf wird unsere Abbildung der Sternbilder noch über das Lasurblau mit Bleiweiß bemalt, damit es den Augen heller (deutlicher) erscheine. Nachdem dies ausgeführt ist, zeigt sich uns das Gewünschte in möglichst genauer Arbeit. Aber unter den Künstlern (Astrolabien- und Globenverfertigen) sind solche, die sich zum Rechnungsverfahren hinneigen und dieses dem konstruktiven (mechanischen) Wege vorziehen mit . . . (Lücke!) . . . Deshalb wird nun das, was wir [soeben] erwähnt haben, auf den Weg der Rechnung übertragen, und wir gelangen dadurch zur Kenntnis der Durchmesser [der Längen- und Breitenkreise] und der Entfernungen ihrer Mittelpunkte von dem des gegebenen [Projektions-]Kreises und der Durchschnittspunkte der Linien (d. h. der Radien bezw. ihrer Verlängerungen) mit dem Umfang [des Projektionskreises].

Wir zeichnen wieder den Kreis ABGD um den Mittelpunkt E und mit den Durchmessern AEG und BED, und von den Längenkreisen nehmen wir BTD an mit dem Mittelpunkt Z und ziehen BZ, welches den Umfang des Kreises in H treffe, so wollen wir nun TZ, d. h. den Radius des Kreises BTD, und EZ, d. h. die Entfernung seines Mittelpunktes von dem des Kreises ABGD, bestimmen. Weil nun ET und TG bekannt sind als gegeben [von Anfang an] und das Rechteck ET. (EZ + ZT) = EB^2 ist, so erhalten wir EZ + ZT, wenn wir 8100, d. h. EB^2, durch ET teilen, und wenn wir zum Ergebnis ET addieren, erhalten wir den Durchmesser des Längenkreises, und wenn wir die Hälfte von ET von der Hälfte dessen, was sich aus der Division ergeben hat, abziehen[38]), so erhalten wir EZ[39]), d. h. die Entfernung der beiden Mittelpunkte. Was dann weiter die Kenntnis des Maǵâz (d. h. Ort des Durchganges oder Durchschnittes), das ist die Entfernung zwischen A und H, anbetrifft, so ziehen wir die Senkrechte HK; weil nun Rechteck AZ . ZG = Rechteck BZ . ZH, so hat man die Proportion AZ : ZH = BZ : ZG[40]), wenn wir nun AZ, d. h. den Unterschied zwischen 90 Teilen und EZ, mit ZG = 180-AZ multiplizieren und das Produkt durch den Radius BZ des Längenkreises dividieren, so erhalten wir ZH; dies behalten wir im Gedächtnis; nun besteht auch die Proportion ZH : HK = BZ : BE, multiplizieren wir also ZH mit BE, das gleich 90 Teilen ist, und teilen das Produkt durch BZ, den Radius des Längenkreises, so erhalten wir HK, d. h. den Sinus des gesuchten AH. Aber diese Linien und der Sinus werden in dem Maße er-

Figur 2.



38) Im Text steht „addieren".

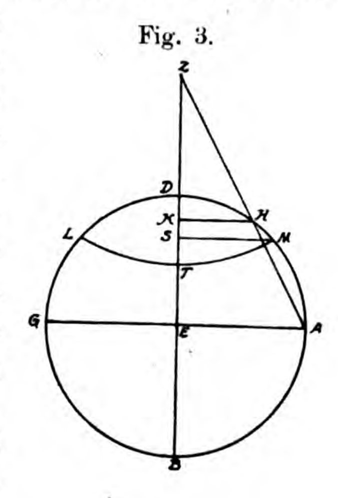
39) $\frac{EZ + ZT}{2} - \frac{ET}{2} = EZ$

40) Diese Proportion wäre nicht nötig gewesen.

halten, in dem der Radius des Kreises ABGD = 90 Teilen ist, also ist es notwendig, daß dieser Sinus in einen solchen verwandelt werde, für den der Radius des Kreises = 60 Teilen ist, damit, wenn wir zu diesem Sinus in den Tafeln den Bogen aufsuchen, wir den Bogen AH [in Graden] erhalten. Dies geschieht einfach dadurch, daß du von ihm (d. h. dem 90er Sinus) sein Drittel abziehst, oder ihn mit 40' multipliziert. Dieser Bogen AH, d. h. der Bogen des Mağâz ist auf der Seite gegen D hin, wenn der Punkt Z innerhalb des Kreises liegt, und gegen B hin (AH_1), wenn der Punkt Z außerhalb des Kreises liegt (Z_1). Die Lage des Punktes Z richtet sich nach dem Verhältnis von EZ zu AE, sind diese beiden Größen gleich, so fällt der Punkt Z mit A zusammen, und der Bogen des Mağâz ist Null[41]); = ist die Entfernung EZ größer als 90 Teile, d. h. als AE, so ist Z außerhalb des Kreises, im andern Falle innerhalb. Es ist klar, daß, wenn wir für alle Kreise, die in die Hälfte BGDE fallen, diese Größen gefunden haben, wir sie auch für die Hälfte BADE kennen.

Wir gehen nun über zu den Breitenkreisen. Wir zeichen wieder den Kreis ABGD und in ihn einen Breitenkreis MTL, sein Mittelpunkt sei Z; man ziehe AHZ und die Senkrechte MS [auf ZE], so ist diese der Sinus des Bogens MD und SE sein Cosinus[42]), beide sind aus den Tafeln bekannt[43]). Wenn wir zu jeder dieser Größen (MS und SE) je ihre Hälfte addieren oder jede mit 90' multiplizieren[44]), so wird sie aus einer Sechziger-Größe in eine Neunziger-Größe verwandelt; wenn nun SE in diesem Maße bekannt ist, und wir subtrahieren von ihm ET [das gegeben ist], so bleibt TS; es ist nun $TS. (SZ + TZ) = (MS)^2$, teilen wir also $(MS)^2$ durch TS, so erhalten wir $SZ + TZ$ und wenn wir die Hälfte von TS zur Hälfte von $SZ + TZ$ addieren, so erhalten wir TZ, und dies ist der Radius des Breitenkreises, und wenn wir ET zu TZ addieren, so erhalten wir die Entfernung der beiden Mittelpunkte E und Z. Wollen wir auch den Bogen HD kennen, welcher der Mağâz ist, so machen wir es wie bei den Längenkreisen [d. h. wir ziehen die Senkrechte HK] und haben dann die Proportion DZ : HZ = AZ : BZ, [aus dieser Proportion finden wir HZ], ferner besteht die Proportion HZ : HK = AZ : AE, also ist auch HK bekannt, es wird aus einem Neunziger-Sinus in einen Sechziger verwandelt[45]) und dazu der Bogen in den Tafeln gesucht, so hat man den Bogen HD[46]). Haben wir dies mit den Breitenkreisen der Hälfte ADGE getan, so haben wir es auch für die Hälfte ABGE. Die

Fig. 3.



41) Im Text mutalâšija = eitel, nichtig, verschwindend.

42) Wörtlich: der Sinus der Ergänzung AM.

43) Da AM, also auch MD, gegeben ist.

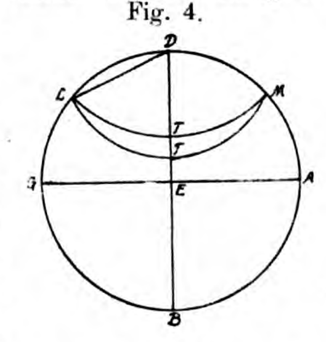
44) D. h. mit $\frac{90}{60} = \frac{3}{2}$.

45) Durch Multiplikation mit $\frac{2}{3}$ oder 40'.

46) Diese Darstellung weicht etwas von der in der Chronologie al-Bîrûnis gegebenen ab (vergl. die Ausgabe von Sachau, arab. Text S. 361, engl. Übersetzung S. 363—64).

Mittelpunkte der Breitenkreise fallen stets außerhalb des Kreises [ABGD], weil, wenn wir irgend einen Breitenkreis angenommen haben, das Stück, das er von DE abschneidet, sich zu DE verhält wie das, was er von den Bogen DA und DG abschneidet, zum Quadranten, und dieses [Stück] ist immer kleiner als jede der beiden Sehnen jener [abgeschnittenen] Bogen [47]); wenn nun der Mittelpunkt eines solchen Breitenkreises [48]) der Punkt D wäre, so wäre sein Radius gleich der Sehne eines der beiden Bogen (z. B. DL), und der Kreis ginge also nicht durch das Ende [T] des auf DE abgetragenen Abschnittes, sondern über ihn hinaus gegen E hin (durch den Punkt T_1), und [umgekehrt], wenn er durch das Ende dieses Abschnittes ginge, so fiele der Mittelpunkt notwendig außerhalb des Kreises (d. h. außerhalb D); wenn nun die Sache nicht möglich ist für den Punkt D, so ist sie noch weniger möglich für einen Punkt innerhalb D, w. z. b. w.

Fig. 4.



Für die Darstellung des Sternbildes gibt es noch einen andern Weg, der auch ziemlich genau ist. Du nimmst ein in 180 gleiche Teile geteiltes Lineal und ziehst auf einer Ebene eine gerade Linie und trägst auf ihr ebensoviele gleiche Teile ab, dann nimmst du auf der Himmelskugel zwei Sterne an (d. h. bestimmst ihre Lage nach der vorigen Weise) und vergleichst mit ihnen einen dritten Stern, so daß aus ihren gegenseitigen Entfernungen ein Dreieck entsteht. Die Entfernungen der Sterne bestimmst du so, daß du an je zwei der Sterne ein biegsames Lineal (einen Papierstreifen) anlegst, das sich also an einen Großkreis der Kugel anschmiegen kann, hierauf missest du die gefundenen Entfernungen mit dem Zirkel auf dem (in 180 Teile geteilten) Lineal ab und zeichnest aus diesen auf der Projektionsebene ein Dreieck; dann nimmst du auf der Kugel einen vierten Stern an und missest seine Entfernungen von zweien der vorigen Sterne und trägst sie mit dem Zirkel wieder auf wie vorher, so erhältst du ein zweites Dreieck an das andere angelegt, und so verfährst du, bis du alle Sterne [auf der Projektionsebene] aufgetragen hast. Dieser Weg ist für den Ausführenden keineswegs schwer. Ebenso leicht wäre folgender: Man bestreicht die Stellen der Sterne auf der Kugel mit etwas, was Spuren hinterläßt bei der Berührung [mit Papier]; dann wird die Kugel auf die Ebene, auf die das Bild kommen soll, gelegt, dann auf ihr gewälzt mit einer Bewegung, die in einer kontinuierlichen (stetigen) Drehung besteht und wieder auf den Anfangsort zurückführt; so verfährt man, bis alle Teile der Kugel ihre Spur auf der Ebene hinterlassen haben. Wenn man bei dieser Methode die richtigen Vorteile beobachtet (?), so unterscheidet sich ihr Resultat von der Wahrheit nur um so viel, als sich die Bejahung (Affirmation) des Teils, der nicht geteilt werden kann, von seiner Verneinung (Negation) unterscheidet [49]).

47) Wenn dies auch ziemlich klar ist, so dürfte doch der Beweis hiefür nicht fehlen.

48) Der Text hat bloß „Bogen".

49) Das will wohl sagen, daß sich das Resultat von der Wahrheit gar nicht unterscheide, was allerdings für diese ziemlich primitive Methode zu weit gegangen ist.



Die Art und Weise, wie die Erdkugel mit dem, was auf ihr sich befindet, abgebildet wird, ist dieselbe wie für die Himmelskugel, nur braucht man bei dieser die Sterntafeln und den Ort der Milchstraße [zu kennen] aus dem Almagest oder dem Buche des Abu'l-Ḥosein al-Ṣûfî oder den Tafeln al-Battânîs oder ähnlichen, während man bei der Erdkugel das, was in der Geographie [des Ptolemäus?] über die Längen und Breiten der Städte und Flecken, über die Meere, die Flüsse, die Sandhügel (Sandwüsten?), die Berge und Erzlager, die Vertiefungen (Täler?) und anderes aufgezeichnet ist, zu wissen braucht. — Schon früher wurde von den Verfassern der Bücher der Wege und der Länder[50]) verlangt, daß in den Bildern der Erdoberfläche die Meere pistaziengrün, die fließenden Gewässer ambragelb, die Namen schwarz, die Sandhügel safrangelb, die Berge violett mit leichtem Rot gemischt, die Städte zinnoberrot in viereckigen Figuren, die Straßen staubfarbig bis schwärzlich ausgeführt werden sollen.

Soll nun unsere Ausführung eine Ähnlichkeit mit dem oben erwähnten haben, es stehen uns aber keine Bücher der zwei genannten Arten[51]) zur Verfügung, so müssen wir uns praktischer Hilfsmittel bedienen, und zwar für die Beobachtung der Gestirne der Armillarsphäre und anderer hiefür bestimmter Instrumente, und für das, was auf der Erde ist, haben wir die Kenntnis der Längen und Breiten nötig. Ich habe schon früher eine Abhandlung über die Verbesserung dieser Dinge und die verschiedenen Wege zur Kenntnis jedes einzelnen verfaßt, aber die Kenntnisse, die zur Ausführung von allem diesem notwendig sind, bedürfen eines langen Lebens, das dem Menschen gewöhnlich nicht zu teil wird, und einer durch alle Himmelsgegenden der Erde reichenden Kraft (Macht) und reicher Hilfsmittel, die man unter die Bewohner [der Gegenden, durch die man reist,] verteilen kann, besonders unter diejenigen, die für die Vereinbarung (Abmachung) tauglich befunden werden; hiezu gesellen sich noch alle möglichen zeitlichen (zufälligen?) Ereignisse. Selten ist alles dieses in einer Person vereinigt, besonders in den Zeiten, in denen wir leben; deswegen ist es nötig, daß wir uns auf die Handlungsweise der Alten beschränken und die Sorge darauf richten, eines nach dem andern zu verbessern von dem, was zu verbessern möglich ist. Denn wer alles will, verliert sich in dem All, und wer bis ans äußerste Ende [des Wissens] gelangen will, ist zu schwach, es zu erreichen, und er achtet nicht auf den Schaden an den Gütern des Lebens und das Verschwinden des Fleißes und den Verlust der Schätze (des Ersparten). Der Mittelweg in jedem Ding ist löblich, weit weg von dem Zuwenig und dem Zuviel[52]). Gott, er ist groß, hilft denen, die auf seine Worte horchen und seine gute Meinung befolgen. Er hat uns zu denen gemacht, die nach seinem Wohlgefallen handeln sollen und nicht den Götzen

50) Arabisch al-masâlik wa'l-mamâlik; als Verfasser von Geographiewerken unter diesem Titel vor al-Bîrûnî kennen wir Ibn Chordâdhbeh, ums Jahr 845, dann Ibrâhîm b. Muḥammed al-Iṣṭachrî, um 950. Das erste Werk erschien als 6. Band, das zweite als 1. Bd. der Biblioth. geograph. arabic., Leiden 1889 und al-Bekrî (vergl. Brockelmann 1, 476).

51) Nämlich der astronomischen Tafeln und der geographischen Handbücher.

52) Dieser Satz ist im Text verdorben, doch ist dies jedenfalls sein Sinn.



ihrer Begierde folgen; er gibt uns das Nötige für diese und die zukünftige Welt; denn er ist mächtig in dem, was er will, und weise in Bezug auf das, was das Herz bewegt (in den Dingen der Herzen). Beendigt ist das Buch der Projektion der Sternbilder und der Länder, und Lob sei Gott, dem Herrn der Welten, er segne unsern Herrn Muḥammed, seine Familie und seine Genossen alle und verleihe ihnen das Heil.

Kommentar.

Wir haben zu dieser Abhandlung al-Bîrûnîs nur weniges hinzuzufügen. Die der eigentlichen Abhandlung vorausgehende Einleitung (S. 300—301), die die übliche Anrufung Gottes in ziemlich breiter Ausführung enthält, habe ich weggelassen, sie enthält am Schlusse einen Lobspruch (Widmung) auf seinen Wohltäter, den Chwârezm-Schâh[53]), dessen eigentlicher Name nicht angegeben ist, sehr wahrscheinlich ist es der Emir Ma'mûn b. Ma'mûn Chwârezm-Schâh, gest. 407 d. H. (1016/17); al-Bîrûnî hat also diese Abhandlung sehr wahrscheinlich in den Jahren 400—407 d. H. (1009—1016) geschrieben, während welcher er im Dienste dieses Fürsten stand. Al-Bîrûnîs Chronologie[54]) enthält am Schlusse ein Kapitel über die Mondstationen, welchem der Verfasser auch über die projektive Darstellung dieser Stationen und der übrigen Sternbilder einen Anhang beifügt. Dieser Anhang deckt sich ungefähr (keineswegs wörtlich) mit dem mittleren Teil der vorliegenden Abhandlung (d. h. mit der Übersicht über die verschiedenen Projektionsarten und mit der speziellen Methode al-Bîrûnîs); wir müssen aber annehmen, daß vorliegende Abhandlung nach der Chronologie geschrieben worden ist; denn erstens ist sie in der letztern nicht erwähnt, die nach E. Sachau im Jahre 390 oder 391 d. H. (1000—1001) geschrieben worden sein muß, und zweitens herrschte der Fürst, dem er sie gewidmet hat, erst nach dieser Zeit über Chwârezm. Al-Bîrûnî hielt es also nach Abfassung seiner Chronologie für notwendig, noch eine selbständige Abhandlung über Darstellung von Himmels- und Erdkarten zu veröffentlichen. Diese Abhandlung ist, wie auch die Chronologie, in das von ihm selbst verfaßte Verzeichnis (Fihrist) seiner Schriften aufgenommen[55]).

Die Stellen der vorliegenden Abhandlung, die über ältere Projektionsmethoden handeln, sind nicht ganz klar, besonders die Bemerkungen über das Astrolabium al-mubaṭṭach des Châlid b. 'Abdelmelik und über einige Kegelprojektionen; hier ist der Text am stärksten verdorben. Der Teil über al-Bîrûnîs eigene Projektionsart ist am klarsten, aber leider ist diese von einer winkel- oder flächentreuen Projektion noch ziemlich weit verschieden. Sie ist eine abgeänderte oder ver-

53) Zu den Beziehungen von al-Bîrûnî zu den Chwârezmer-Schâh vergl. E. Wiedemann und J. Hell, Mitt. zur Geschichte der Medizin und Naturwissensch. 21, 313. 1912.

54) Herausgeg. von E. Sachau, Leipzig 1878, mit engl. Übers. von ihm selbst. London 1879.

55) Vergl. Chronologie, arab. Text, Einleitung S. XLIII u. XLVI, H. Suter und E. Wiedemann a. a. O., S. 74, V, 3.



einfachte stereographische Projektion, die Ähnlichkeit hat mit der zuerst von Nicolosi di Paternò (Sizilien) im Jahre 1660 veröffentlichten, die später Globular- oder auch englische Projektion genannt wurde, weil sie von dem Engländer Arrowsmith (1794) wieder aufgenommen wurde[56]). Über sie hat auch der Italiener Fiorini (Bologna) eine Arbeit veröffentlicht, indem er an das genannte Kapitel der englischen Übersetzung der Chronologie anknüpfte[57]).

Ich habe die Projektion al-Bîrûnîs mit der stereographischen Äquator-Projektion in Bezug auf die Genauigkeit verglichen und habe für den Radius des Breitenkreises von 60° den Erdradius = 1 gesetzt, bei al-Bîrûnî die Länge 0,725, für den Breitenkreis von 30° = 2,333 gefunden, während die entsprechenden Radien bei der stereographischen Projektion 0,577 und 1,732 sind. Bei den Längenkreisen (Meridianen) sind die Differenzen etwas geringer, so ist z. B. der Radius für den durch den 60. Grad (von der Mitte des Bildes aus gezählt) gehenden Meridian bei al-Bîrûnî = 1,08, bei der stereograph. Projektion = 1,15, bei dem durch den 30. Grad gehenden sind die entsprechenden Zahlen 1,66 und 2.

Der Sch . ßteil der Abhandlung läßt in Folge des Abfalles von dem wissenschaftlichen Charakter des ersten und mittleren Teiles etwas unbefriedigt. Al-Bîrûnî ergeht sich in unnützen Klagen darüber, daß diejenigen, denen keine astronomischen Tafeln und keine geographischen Bücher (Reisewerke) zu Gebote stehen, viel Zeit und Geld opfern müßten, um auf weiten Reisen die nötigen Kenntnisse, natürlich in erster Linie die Längen und Breiten der Orte auf der Erde, sich zu erwerben, um schließlich auf die Erkenntnis zu kommen, daß es kaum einem Menschen möglich sein würde, dieses Ziel zu erreichen.

56) Vergl. A. Dardano, Cartografia elementar epratica, in La Geografia, Communicazioni dell' Istituto geografico De' Agostini Novara. I. 3 (Febr. 1913). Diese Globularprojektion wird auch, unserer Ansicht nach mit Unrecht, dem Gloreanus (H. Loriti) zugeschrieben.

57) Vergl. Bollett. della soc. geograf. ital. Ser. III, Vol. 4, 287ff. 1891.

Das Buch der geometrischen Konstruktionen
des *Abu'l Wefâ'*[1]).

Zu den bedeutendsten Männern auf dem Gebiete der Astronomie und Geometrie im Mittelalter gehört nach dem Urteil seiner Mit- und Nachwelt der arabische Mathematiker Abu'l Wefâ' Muḥ. b. Muḥ. b. Jaḥjâ b. Ismâ'îl b. al-'Abbâs al-Bûzğânî (940—997). (Über sein Leben und seine Schriften vergl. H. Suter, Die Mathematiker und Astronomen der Araber u. s. w. Nr. 167 und insbesondere F. Woepcke, Journal Asiatique [5], V, 243 u. ff. 1855.) Mit astronomischen Schriften von Abu'l Wefâ', besonders mit seinem „Almagest" betitelten Werk hat sich L. P. E. A. Sédillot[2]) beschäftigt. Er schrieb Abu'l Wefâ' die Entdeckung der Variation in der Mondbahn zu. In dem darüber ausgebrochenen Streite behielt Sédillot die Oberhand[3]). Mit geometrischen Schriften des großen Mathematikers, dessen Einführung verschiedener trigonometrischer Funktionen[4]) und Sätze für die Entwicklung der ebenen und sphärischen Trigonometrie von größter Bedeutung war, hat sich F. Woepcke[5]) beschäftigt, besonders mit dem Buch der geometrischen Konstruktionen nach einer persischen Handschrift. Diese stammt aber seiner Ansicht nach nicht von Abu'l Wefâ' selbst, sondern von einem seiner Schüler, der sie wohl nach Vorlesungen seines Meisters verfaßte. Die gleiche Arbeit Abu'l Wefâ's hat die folgende Abhandlung zum Vorwurf, die die Übersetzung einer arabischen Handschrift ist. Sie befindet sich in der Bibliotheca Ambrosiana in Mailand (Hammer-Purgstall, Catalogo dei codici arabi pg. 44, no. 68). Herr Professor E. Griffini ist auf sie aufmerksam geworden und hat davon H. Suter eine Weiß-Schwarz-Photographie gesandt. Leider enthält die Handschrift nur ein Bruchstück des Buches der geometrischen Konstruktionen, wie sich aus einem Vergleich mit der Arbeit von Woepcke ergibt und aus der folgenden Zusammenstellung hervorgeht. Der in Betracht kommende Teil umfaßt die Seiten 3a—32b der Mailänder Handschrift. Es fehlt also der Anfang der Schrift, der vor allem die verschiedenen Arten der Konstruktion eines rechten Winkels behandelt. (Aufgaben 1—4 der

---

1) Herr Professor Suter hat noch vor seinem Tode seine Übersetzung gesandt mit dem Ersuchen, sie mit einem Kommentar zu versehen und druckfertig zu machen. Seine Bemerkungen wurden dabei verwendet.

2) L. P. E. A. Sédillot, Materiaux p. servir à l'hist. etc. I, 213ff. 1845.

3) Vergl. R. Wolf, Handbuch d. Astronomie I. 455. Zürich 1890.

4) A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Gesch. d. Trigonometrie I. 58. 1900.

5) F. Woepcke, Journal Asiatique a. a. O., S. 218 u. ff., 309 u. ff.



Introduction bei Woepcke.) Auf Seite 12b bricht die Aufgabe über die Vervollständigung eines Kreisbogens zu einem Vollkreis ab und findet keine Fortsetzung auf der folgenden Seite, die mit der zweiten Aufgabe des 4. Kapitels beginnt. Es fehlen also der Schluß des 2., das ganze 3. und der Anfang des 4. Kapitels. Vom 7. Kapitel enthält unsere Handschrift die ersten 4 Aufgaben und einen Teil der fünften. Es fehlen somit alle anderen Aufgaben dieses Kapitels, das übrigens auch in der Handschrift Woepckes nicht vollständig ist, und ferner die folgenden 6 Kapitel. Dabei ist zu bemerken, daß in unserer Handschrift die Zählung der Kapitel mit der in der persischen nicht übereinstimmt, da das 1. Kapitel der Ambrosiana-Handschrift die Einleitung in der von Woepcke benutzten ist. Die Nummerierung der Seiten unserer Handschrift ist teilweise falsch.

Trotzdem Woepcke das Buch der Konstruktionen bereits veröffentlicht hat, ist die Mitteilung der deutschen Übersetzung unserer Handschrift doch berechtigt. Denn abgesehen davon, daß Woepckes Arbeit nicht allgemein zugänglich ist, ist sie nur ein Auszug in knapper Form, z. T. nur mit Angabe der Kapitelüberschriften, und ohne Figuren. Diese konnte Woepcke bei der großen Zahl, die seine Handschrift enthielt, nur zum kleinsten Teil wiedergeben. Der Hauptwert unserer Handschrift liegt darin, daß sie für die einzelnen Konstruktionen die Beweise bringt, die sich in der persischen Handschrift nicht finden. Woepcke vermutete, daß die Originalarbeit sie enthalten habe. So liegt die Annahme nahe, daß unsere Handschrift ein Bruchstück der Arbeit von Abu'l Wefâ' selbst ist. Dem widerspricht aber, daß wiederholt sich in der Handschrift die Bemerkung findet: „Es sagt Abu'l Wefâ' u. s. w." Daraus könnte man schließen, daß die Arbeit von einem Späteren herrührt, der diese Zusätze gemacht hat, wenn auch die Ansicht nicht von der Hand zu weisen ist, daß Abu'l Wefâ' seine eigenen Gedanken dadurch besonders hervorheben will gegenüber dem, was andere, z. B. Euklid, schon früher gesagt haben. Die auf S. 108 u. Anm. 40 gemachten Bemerkungen dürften als weitere Beweise dafür angesehen werden, daß unsere Handschrift nicht Abu'l Wefâ' zum Verfasser hat. Die Beweispunkte, auf die sich Woepcke bei seiner Behauptung, daß die persische Schrift nicht von Abu'l Wefâ' selbst stammt, stützt, können wir für unsere Handschrift nicht nachprüfen, da sie nicht mehr die betreffenden Stellen enthält.

Die nachfolgenden Konstruktionen bieten ein schönes Zeugnis für die Erfindungsgabe der arabischen Geometer. Sie zeigt sich bei den einfachen Aufgaben hier ebenso schön wie bei den schwierigen Problemen der Quadratur der Parabel und Kubatur der Paraboloide, die H. Suter früher veröffentlicht hat[6]). Besonderes Interesse verdienen die Konstruktionen mit konstanter Zirkelöffnung. W. M. Kutta[7]), der die Geschichte der Geometrie mit konstanter Zirkelöffnung

6) H. Suter, Bibl Mathem. [3], **12**. 289. 1911/12 u. Sitzgsber. d. phys.-med. Soz. in Erlangen **48/49**, 65. 1916/17.

7) W. M. Kutta, Nova acta, Abhdl. d. K. Leop.-Carol. Deutschen Akad. d. Naturforscher LXXI, Nr. 3. 1897.



bis zu Steiner behandelte, hat nachgewiesen, daß Abu'l Wefâ' der erste war, der sich diese Bedingung für geometrische Konstruktionen ausdrücklich oder stillschweigend gestellt hat. Kutta führt aus Wöpckes Übersetzung einige Beispiele an. Im folgenden finden wir noch mehrere dieser Art. Sie alle zeigen eine große Gewandtheit auf dem konstruktiven Gebiete, wenn auch die praktische Anwendbarkeit dieser Konstruktionen nicht in allen Fällen auf der gleichen Höhe steht. Das wollten aber auch die arabischen Geometer gar nicht erreichen. Ganz auf dem Boden der großen Geometer des Altertums stehend, betrachteten sie die praktische Geometrie nicht als gleichberechtigt mit der theoretischen, sie sahen sie als unwissenschaftlich an.

Verzeichnis der Aufgaben des Manuskripts der Ambrosiana.

1. Kap. (bei Woepcke die „Introduction"). Der Anfang fehlt; es schließt mit der Aufgabe: Über die Prüfung der Richtigkeit des Winkelmaßes (3 Arten; bei Woepcke Aufgabe 5 und 6, S. 322).

Dann folgt das 2. Kap. Über die Grundaufgaben, die vorauszuschicken nötig sind (bei W.[7a] Kap. 1).

Aufg. 1. Wie man eine Gerade oder einen Kreisbogen in 2 gleiche Teile teilt (bei W. Aufg. 1, S. 322).

Aufg. 1a. Wie man eine Gerade in 2 oder mehrere gleiche Teile teilt (bei W. Aufg. 1a, S. 322).

Aufg. 2. Wie man einen gegebenen Winkel halbiert (bei W. Aufg. 1b, S. 323).

Aufg. 3. Wie man von einem Punkt eine Senkrechte auf eine Gerade fällt (bei W. Aufg. 2, S. 323).

Aufg. 4. Von einem Punkt im Raume eine Senkrechte auf eine Ebene zu fällen (bei W. Aufg. 3, S. 323).

Aufg. 5. Wie man einen gegebenen Winkel (an eine Gerade) anträgt (bei W. Aufg. 4, S. 323).

Aufg. 6. Wie man durch einen Punkt eine Parallele zu einer Geraden zieht (bei W. Aufg. 5, S. 323).

Aufg. 7 u. 7a. Wie man den Mittelpunkt eines Kreises findet (bei W. Aufg. 7 u. 8, S. 323).

Aufg. 7b. Wie vervollständigen wir ein Stück eines Kreises (einen Kreisbogen) [zum ganzen Kreis] (bei W. Aufg. 9, S. 323–24). Diese Aufg. ist unvollständig.

4. Kapitel. Aufg. 1. Andere Art, ein Quadrat in einen Kreis zu zeichnen (bei W. Aufg. 3, S. 331). (Mit einer Zirkelöffnung.) Diese Aufg. 10 setzt sich fort auf fol. 13b, dann wieder auf 24a, dann auf 24b. Auf 25a folgt wieder eine andere Konstruktion dieser Aufgabe; auf 26a folgt eine weitere (bei W. Aufg. 4—8, S. 331).

Aufg. 2a. Ein regelmäßiges Fünfeck in einen Kreis zu zeichnen (bei W. Aufg. 9, S. 331).

7a) Woepcke ist künftig mit W. abgekürzt.

Aufg. 2b. Ein regelmäßiges Fünfeck in einen Kreis zu zeichnen mit nur einer Zirkelöffnung (= Radius des Kreises; bei W. Aufg. 10, S. 332).

Aufg. 2c. Eine dritte Konstruktion des Fünfecks (bei W. Aufg. 11, S. 332).

Aufg. 3. Ein regelmäßiges Sechseck in einen Kreis zu zeichnen (bei W. Aufg. 12, S. 332).

Aufg. 4. In einen Kreis ein regelmäßiges Siebeneck zu zeichnen (bei W. Aufg. 13, S. 332).

Aufg. 5. In einen Kreis ein regelmäßiges Achteck zu zeichnen (bei W. Aufg. 14, S. 333).

Aufg. 6. In einen Kreis ein regelmäßiges Neuneck zu zeichnen (bei W. Aufg. 15, S. 333). Diese Aufgabe setzt sich fort auf fol. 22a.

Aufg. 7. In einen Kreis ein regelmäßiges Zehneck zu zeichnen (bei W. Aufg. 16, S. 333).

5. Kap. Die den Figuren umbeschriebenen Kreise zu zeichnen.

Aufg. 1a. Um ein gleichseitiges Dreieck einen Kreis zu zeichnen (bei W. Aufg. 1, S. 333).

Aufg. 1b. Andere Konstruktion dieser Aufgabe (bei W. Aufg. 2, S. 333). Diese Aufgabe setzt sich fort auf fol. 14a, 14b.

Aufg. 2. Um ein Quadrat einen Kreis zu zeichnen (bei W. Aufg. 3, S. 333).

Aufg. 3. Um ein (regelmäßiges) Fünfeck einen Kreis zu zeichnen (bei W. Aufg. 4, S. 333).

Aufg. 4. Um ein (regelmäßiges) Sechseck einen Kreis zu beschreiben (bei W. Aufg. 5, S. 333).

Aufg. 5. Um die übrigen (regelmäßigen) Vielecke einen Kreis zu beschreiben (bei W. Aufg. 6, S. 333).

6. Kap. Die in Figuren einbeschriebenen Kreise zu zeichnen (bei W. Kap. 5, S. 333).

Aufg. 25. In ein Dreieck einen Kreis zu zeichnen.

7. Kap. Konstruktion von Figuren in Figuren (bei W. Kap. 6, S. 334).

Aufg 1. In ein Quadrat ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen (bei W. Aufg. 1, S. 344).

Aufg. 1b. Zweite Konstruktion dieser Aufgabe (bei W. Aufg. 2, S. 334).

Aufg. 1c. Dritte Konstruktion dieser Aufgabe (bei W. Aufg. 3, S. 334).

Aufg. 1d. Vierte Konstruktion dieser Aufgabe (bei W. Aufg. 4, S. 335).

Diese Konstruktion samt Beweis setzt sich fort bis fol. 21b, bricht hier ab. setzt sich auf fol. 32a fort und endet hier.

Aufg. 1e. Fünfte Konstruktion dieser Aufgabe (unvollendet; bei W. Aufg. 5, S. 335).



Übersetzung.

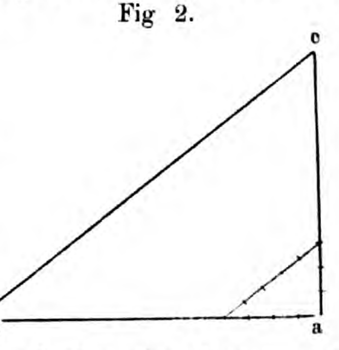
. . . Winkel dab ein rechter[8]). — Über die Prüfung der Richtigkeit eines Winkelmaßes[9]) (bei W. Aufg. 5 der Einleitung). Wenn wir ein Winkelmaß haben und prüfen wollen, ob sein Winkel genau ein rechter sei, so können wir dies mit Hilfe der vorausgegangenen Konstruktion (bei W. Aufg. 3 oder 4 der Einleitung). Um z. B. zu prüfen, ob ∢ bag[10]) (Fig 1) genau ein rechter ist oder nicht, nehmen wir auf der Linie ag den Punkt d und schlagen nun den vorher befolgten Weg ein; es sei z der Durchschnittspunkt der beiden Kreise (um a und um d), wir ziehen dz, verlängern es bis e und machen ze = dz; wir beobachten dann den Punkt e; fällt er auf die Linie ab, so ist der ∢ a ein rechter und das Winkelmaß ist richtig, fällt er außerhalb der Linie ab (außerhalb des △ abg), so ist der ∢ a ein spitzer, und fällt er innerhalb der Linie ab (in das △ abg), so ist der ∢ a ein stumpfer, d. h. größer als ein rechter. — Der Beweis ist schon in der dritten Aufgabe[11]) enthalten.

Fig. 1.

b e z g d a

Zweite Art der Prüfung für die Richtigkeit eines Winkelmaßes (bei W. Aufg. 6 der Einleitung). Die Handwerker (Künstler) gehen von einer anderen Erwägung zur Prüfung für die Richtigkeit eines Winkelmaßes aus, nämlich von der folgenden: Wenn sie wissen wollen, ob der ∢ a des Winkelmaßes eab (Fig. 2) ein rechter sei, tragen sie mit dem Zirkel auf ae von a aus drei gleiche Teile in irgend einem Maße ab, auf ab von a aus vier solcher Teile und verbinden die beiden Endpunkte; ist diese Verbindungslinie gleich 5 solcher Teile, so ist ∢ a genau ein rechter, ist sie größer, so ist ∢ a ein stumpfer und ist sie kleiner, so ist er ein spitzer.

Fig 2.



Beweis: Es ist das Quadrat von 3, nämlich 9, und das Quadrat von 4, nämlich 16, zusammen gleich dem Quadrat von 5, nämlich 25[12]).

Andere (dritte) Art für die Prüfung der Richtigkeit eines Winkelmaßes[13]). Wir können das vorhergehende Verfahren dahin abändern,

---

8) Dies ist der Schluß eines vorhergehenden zu einer anderen Aufgabe gehörenden Satzes.

9) Hier verwendet Abu'l Wefâ' das Wort *kûnjâ* = γωνια = Winkel, Ecke (vergl. E. Wiedemann, Beitr. VI, 55). Die arabischen Namen der drei Grundinstrumente der Geometrie sind: *al-misṭara* (auch *masṭara*) = das Lineal, *al-birkâr* = der Zirkel, *al-kûnjâ* = das rechtwinklige Dreieck, das rechtwinklige Winkelmaß, die Equerre.

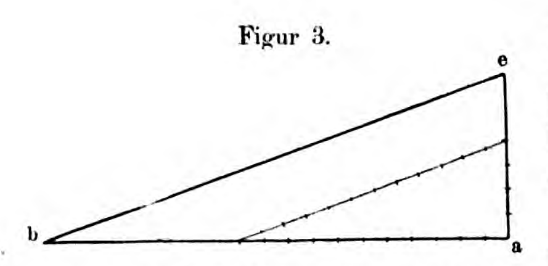
10) Der Buchstabe b fehlt in der Figur, im Text ist e gesetzt

11) Im Endpunkt einer Strecke eine Senkrechte zu errichten, ohne die Strecke zu verlängern.

12) Hiemit schließt der Beweis; es sollte eigentlich noch folgen: so ist der ∢ a ein rechter nach Euklid, Elemente I. B., Satz 48.

13) W. erwähnt keine 3. Art; sie ist in der persischen Übersetzung wahrscheinlich mit der zweiten verbunden, da sie ja dieselbe nur mit anderen Zahlen ist.

Figur 3.



daß wir auf ae (Fig. 3) 5 gleiche Teile, auf ab 12 solcher Teile abtragen und die Endpunkte verbinden; mißt die Verbindungslinie 13 Teile, so ist ∢ a ein rechter, im andern Fall nicht.

Beweis: Das Quadrat von 5, also 25, und das Quadrat von 12, also 144, sind zusammen gleich dem Quadrat von 13, nämlich 169 . . . (Ende des 1. Kapitels)[14].

Zweites Kapitel[15]). Über die Fundamentalkonstruktionen, die vorausgeschickt werden müssen.

1.[16]) Wie man eine gerade Linie oder einen Bogen ab eines Kreises in zwei gleiche Teile teilt (gewöhnliche Konstruktion mit Hilfe zweier Kreise mit gleichem Radius um a und b).

1a. Andere Methode, um eine gerade Linie in zwei Hälfte oder in eine größere Anzahl gleicher Teile zu teilen.

(Zu dem Zwecke errichtet man in den Endpunkten der Strecke je eine Senkrechte von gegebener Länge, aber nach verschiedenen Seiten. Die Verbindungslinie der Endpunkte auf den beiden Senkrechten halbiert die Strecke. Um die Strecke in 3 gleiche Teile zu teilen, macht man die Senkrechten doppelt so lange wie im vorigen Fall. Man verbindet jeden Eckpunkt von der einfachen Länge auf der einen Senkrechten mit dem von der doppelten auf der anderen Senkrechten. Die beiden Verbindungslinien teilen die Strecke in 3 gleiche Teile, was aus der Kongruenz bezw. Ähnlichkeit der entstandenen Dreiecke ohne weiteres hervorgeht. Beim Beweis wird auf Euklid 1. Buch, Satz 24 verwiesen.)

Es sagt Abu'l Wefâ': Ebenso (verfahren wir), wenn wir die Linie ab in 4, 5 oder noch mehr gleiche Teile teilen wollen, und ebenso, wenn wir ein Drittel, ein Viertel oder einen beliebigen Teil abschneiden wollen.

2. Und wenn der Sagende sagt, wie teilen wir einen gegebenen Winkel abg mit geraden Schenkeln in zwei gleiche Teile?, so . . . (Gewöhnliche Methode mit Hilfe von Kreisbögen mit gleichem Radius. Beim Beweis wird auf Euklid [I. B., Satz 9] verwiesen.)

3. Von einem gegebenen Punkt auf eine gerade Linie das Lot zu fällen (gewöhnliche Methode mittels Bögen von Kreisen mit konstantem Radius. Beim Beweis wird auf Euklid [I. B , Satz 12] verwiesen).

4. Von einem Punkt a in der Luft eine Senkrechte auf eine ebene Fläche, wie auf eine ebene Wand, auf ein Stück Erde oder auf eine Decke zu ziehen. Wir ziehen in dieser Ebene eine beliebige gerade Linie, sie sei bg. Wir ziehen um a als Mittelpunkt einen Kreis (in der Ebene abg), der bg in den zwei Punkten d und e schneidet. Sie [die Strecke de] halbieren wir in dem Punkt z. Von da aus ziehen wir die Linie hzd (in der gegebenen Ebene)

14) Dieses 1. Kap. ist also in der persischen Übersetzung die „Einleitung".

15) Bei Woepcke 1. Kapitel.

16) Die Nummern stehen nicht im Text.

senkrecht (zu bg). Um a als Mittelpunkt ziehen wir einen (zweiten) Kreis (in der Ebene ahzd), der die Linie hzd in den Punkten j und k schneidet. Die Strecke jk halbieren wir in l und ziehen al. Die Linie al ist dann senkrecht auf dieser Ebene. Wenn die Fläche auf dem horizontalen Boden sich befindet, dann lassen die Handwerker von einem Punkt einen Senkel auf die Ebene herunter. Der Ort, auf welchen der Senkel trifft, ist der Ort *schâqûl*, auf den das Lot fällt.

(Diese Konstruktionsangabe, die Figur in der Handschrift und der Anfang des dazugehörigen Beweises ist ziemlich unklar und zeigt Mangel an Verständnis, woraus man wiederum schließen kann, daß es sich hier nicht um die Originalarbeit des großen Mathematikers Abu'l Wefâ' handelt. Die Methode ist die etwas weiter ausgeführte Konstruktion, die Euklid im 11. Satz des 11. Buches gibt. Auch der Beweis ist im wesentlichen der gleiche wie bei Euklid. Doch wird darauf in unserer Handschrift nicht hingewiesen.)

5. Wie zeichnen wir in dem Punkte d der Geraden de einen Winkel, der gleich dem Winkel abg ist. (Gewöhnliche Methode. Beim Beweis wird auf Euklid I. B, Satz 23 verwiesen.)

6. Wie zeichnen wir durch einen Punkt a die Parallele zu der Geraden bg.

Wir bezeichnen auf der Linie bg einen beliebigen Punkt d und ziehen die Linie ad. Um d als Mittelpunkt machen wir mit dem Abstand ad (auf bg) ein Zeichen e und um a als Mittelpunkt mit dem Abstand ad einen Bogen dh. Dann machen wir (auf ihm) um d als Mittelpunkt und mit dem Abstand ae ein Zeichen h und verbinden a mit h. Dies ist die Parallele zur Geraden bg. (Dieses ist nichts anderes als die Konstruktion eines Parallelogramms. Der Beweis wird auf die Kongruenz zweier Dreiecke, deren gemeinsame Seite die Diagonale ad ist, zurückgeführt. Auch hier wird, soweit möglich, konstante Zirkelöffnung verwendet.)

Es sagt Abu'l Wefâ': Wenn wir diese Linie nach der Methode der Praxis (b. W. Nr. 6)[17], um es genau zu machen, ziehen wollen, so legen wir das Lineal auf bg und öffnen den Zirkel um einen (solchen) Betrag, daß sein einer Schenkel mit dem Lineal zusammenfällt, die Spitze des anderen auf den Punkt a fällt, so ist die Linie, welche der Schenkel herstellt (wenn der Zirkel so umgelegt wird, daß sein Drehpunkt auf den betreffenden Punkt fällt), parallel zur Geraden bg[18].

7.[19]) Und wenn er sagt, wie finden wir den Mittelpunkt eines Kreises ab. (Zu einer Sehne wird die Mittelsenkrechte gezogen, die bis zu ihrem Schnitt mit dem Kreise verlängert wird[20]). Beim Beweis wird auf Euklid verwiesen.)

7a. Andere Methode[19]). (In den Kreis wird ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet. Der Halbierungspunkt der Hypotenuse ist der Mittelpunkt des Kreises.)

17) Bei W. nicht ausgeführt.

18) Der Text ist verdorben, ihm wurde in der angegebenen Weise gerecht zu werden versucht.

19) Bei W. nicht ausgeführt.

20) Dies ist die von Euklid angegebene Methode (III. B., Satz 1).



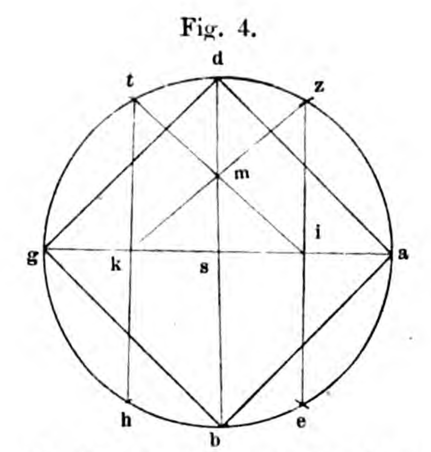


Fig. 4.

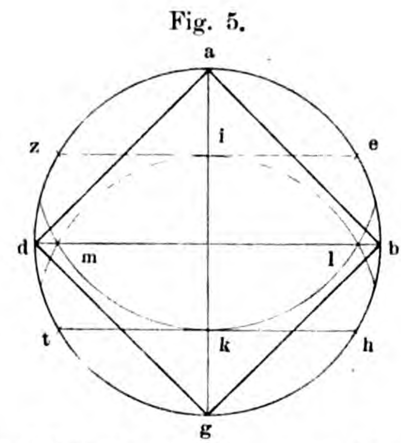


Fig. 5.

7 b. Methode zur Bestimmung des Mittelpunktes des Kreises. Wenn er sagt, wie vollenden wir ein Kreisstück, so nehmen wir das Bogenstück, auf dem sich ag befindet, teilen es in zwei Hälften im Punkte d und ziehen zwei Linien[21]) senkrecht zu ad und gd, die sich in b schneiden. Der Mittelpunkt e von db ist der Mittelpunkt des Kreises[22]).

Viertes Kapitel (bei W. 3. Kapitel).

1. Andere Art der Konstruktion eines Quadrates in einem Kreis[23]).

In den Kreis mit dem Durchmesser ag (Fig. 4) soll ein Quadrat eingezeichnet werden und zwar nur mit der Zirkelöffnung des Radius. Man bezeichnet mit dieser Zirkelöffnung von a aus die Punkte e und z, von g aus die Punkte t und h, zieht ze und th, welche den Durchmesser (ag) in k und i schneiden, zieht (die Linien) kz und ti, die sich in m schneiden, verbindet m mit dem Mittelpunkt s und verlängert diese Linie, bis sie den Kreis in b und d schneidet. Es ist abgd das verlangte Quadrat. (Die arabischen Beweise dieser und der folgenden Konstruktionen lasse ich der Kürze halber fort. Die Ausführung besteht in der Konstruktion des Rechtecks tkiz, dessen Seite ki in s halbiert ist, und dessen Diagonalen sich in m halbieren. In dem dabei entstandenen gleichschenkligen Dreieck mki steht die Mittellinie ms senkrecht auf ki und daher der Durchmesser bd senkrecht auf ag. Daher ist abgd das gesuchte Quadrat.)

Dritte Art (ebenfalls mit ein und derselben Zirkelöffnung wie vorher): In den Kreis mit dem Durchmesser ag (Fig. 5) soll ein Quadrat gezeichnet werden. Wir bezeichnen mit der Zirkelöffnung des Radius von a aus die Punkte e und z, von g aus die Punkte h und t, ziehen ez und ht, welche den Durchmesser ag in i und k schneiden, beschreiben aus diesen Punkten mit der Zirkelöffnung des Radius die Bögen lim und lkm, die sich in l und m schneiden, ziehen lm und verlängern diese (Linie), bis sie den Kreis in b und d schneidet; abgd ist das verlangte Quadrat. (Um die Punkte i und k werden Kreise gezogen, deren Radius gleich dem des Kreises abgd ist; denn die Entfernung ik = zt = Seite

21) Hier (S. 12 b) bricht die Aufgabe ab. Auf Seite 13 a folgt eine Aufgabe (nicht die erste) des 4. Kapitels.

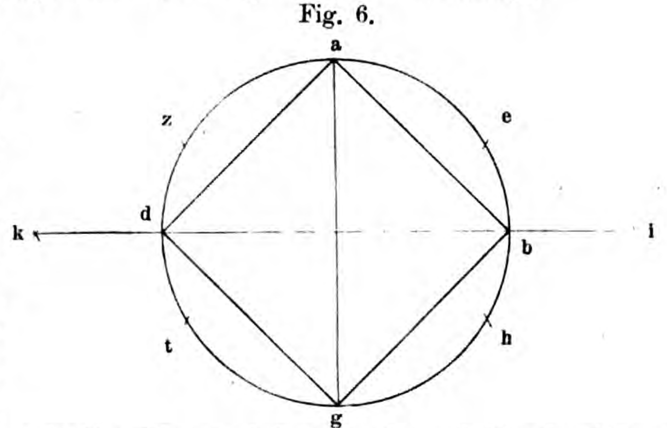
22) Nach W. ergänzt. Euklid behandelt diese Aufgabe etwas anders (III. B., Satz 25).

23) Die erste Art ist vorausgegangen, es folgen noch vier. Sie sind bei W. nicht ausgeführt, Nr. 4—8).



des eingeschriebenen Sechseck = Kreisradius. Die Verbindungslinie der Schnittpunkte m und l der beiden Kreise steht senkrecht auf der ihrer Mittelpunkte i und k. Also Durchmesser db senkrecht Durchmesser ag, und abgd ist das gesuchte Quadrat. Natürlich könnten i und k eine beliebige Lage auf ag haben. Die konstante Zirkelöffnung verlangt aber die Lage in der Zeichnung).

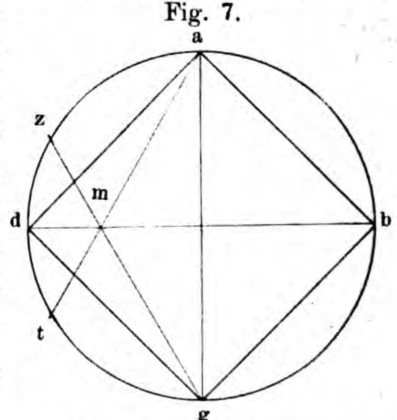
Fig. 6.



Vierte Art (mit derselben Zirkelöffnung): Wir bezeichnen mit der Zirkelöffnung des Radius von a aus (Fig. 6) die Punkt ez u. e, von g aus die Punkte t und h, beschreiben von z und t, sowie von e und h aus Kreisbögen, die sich in k bzw. i schneiden, und ziehen die Linie ki, die den Kreis in b und d schneidet; es ist abgd das verlangte Quadrat. (Die Ausführung geht zurück auf die Konstruktion zweier gleichschenkliger Dreiecke mit der gemeinsamen Basis ag und den Schenkeln, die gleich dem doppelten Radius des gegebenen Kreises sind. ik ist die Mittelsenkrechte dieser Dreiecke und Durchmesser ag senkrecht bd.)

Fünfte Art (mit derselben Zirkelöffnung): Wir bezeichnen von a aus (Fig. 7) den Punkt z, von g aus den Punkt t, ziehen at und gz, die sich in m schneiden, verbinden m mit dem Mittelpunkt und verlängern diese Linie, bis sie den Kreis in b und d schneidet; dann ist abgd das verlangte Quadrat. (Die Konstruktion geht zurück auf die des gleichschenkligen Trapezes aztg. Der Schnittpunkt m seiner Diagonalen ist die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks amg. Die Mittellinie steht senkrecht auf Basis ag und der Durchmesser bd senkrecht auf dem Durchmesser ag. Genauer wäre dieses Verfahren, wenn die gleiche Konstruktion auf der anderen Seite von ag ausgeführt würde.)

Fig. 7.



2. In einen Kreis ein regelmäßiges Fünfeck einzuzeichnen.

a) (Als erste Lösung erscheint die bekannte, heute noch in erster Linie angewandte Konstruktion mit Hilfe des nach dem goldenen Schnitt geteilten Radius; ich lasse diese deshalb fort.)

b) Zweite Art, mit der Zirkelöffnung des Kreisradius. (Diese Lösung stützt sich auf eine vorhergehende Aufgabe (Kap. 3, Nr. 4), die in unserer Handschrift fehlt, wir tragen sie daher aus W. (Kap. 2, Nr. 4) nach):

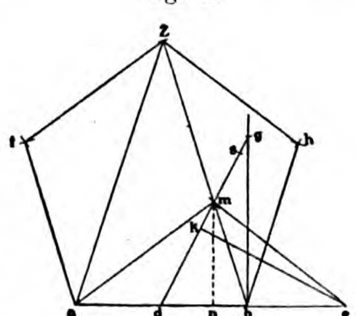
Über einer gegebenen Strecke ein regelmäßiges Fünfeck mit nur einer Zirkelöffnung (derjenigen der gegebenen Strecke) zu zeichnen:

Man halbiert ab (Fig. 8) im Punkte d, errichtet in b eine Senkrechte, macht bg = ab, verbindet d mit g, macht ds = ab, halbiert ds im Punkte k, zieht



die Mittelsenkrechte von ds, die die Verlängerung von ab in e schneidet, macht am = em = ab, zieht bm und verlängert es um mz = ab; dann ist azb das sogenannte Pentagondreieck; beschreibt dann über az und bz die gleichschenkligen Dreiecke zta und zhb, deren Schenkel gleich ab sind. abhzt ist das verlangte Fünfeck. (Die heute noch angewandte Konstruktion ist ähnlich, aber nicht mit einer Zirkelöffnung.)

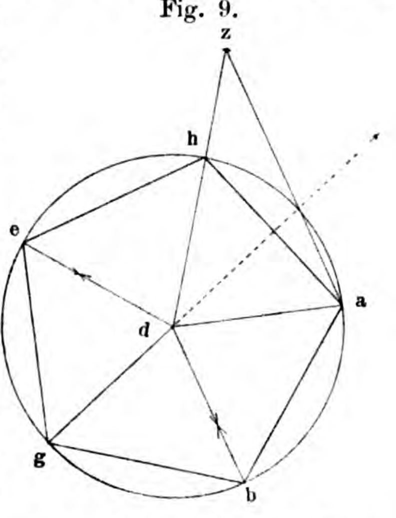
Fig. 8.



Beweis: Es ergibt sich sofort, daß $\triangle$ dek $\cong$ $\triangle$ dbg; hieraus folgt, daß ed = gd ist; daraus folgt $ed^2 = bg^2 + bd^2 = ab^2 + bd^2$, also $ab^2 = ed^2 - bd^2 = (\{ed + bd\}\{ed - bd\}) = ae \, . \, eb$; also ist ae im Punkte b nach dem goldenen Schnitt geteilt und ab der größere Teil, mithin ist ae die Diagonale des Fünfecks, dessen Seite ab ist. Es ist nun noch zu zeigen, daß az = bz = ae ist. Man fällt von m die Senkrechte mn auf ab; dann hat man $mb^2 - bn^2 = me^2 - en^2 = ab^2 - en^2 = ae \, . \, eb - en^2 = 2\,(eb + bn)\,eb - (eb + bn)^2 = eb^2 - bn^2$, also mb = eb; daher ae = ab + eb = ab + mb = mz + mb = bz; ferner ist, da $\triangle$ bme und $\triangle$ mae gleichschenklig sind, $\sphericalangle$ zba = 2 $\sphericalangle$ meb = 2 $\sphericalangle$ mab, und da die Dreiecke mab und maz ebenfalls gleichschenklig sind, ist $\sphericalangle$ zba = $\sphericalangle$ amb = 2 $\sphericalangle$ maz; also ist $\sphericalangle$ mab = $\sphericalangle$ maz, und $\sphericalangle$ zba = 2 $\sphericalangle$ mab = $\sphericalangle$ mab + $\sphericalangle$ maz = $\sphericalangle$ zab; mithin za = zb = ae, w.z.b.w.

(Nun ist 2b) die Aufg. einfach zu lösen:) Der gegebenene Kreis sei abg (Fig. 9), sein Mittelpunkt d, man konstruiere (nach der 4. Proposition d. 3. Kap.) über ad das Pentagondreieck adz, entsprechend dem $\triangle$ abz in voriger Figur; die Seite dz schneide den Kreis im Punkte h, (so ist ha die Fünfeckseite); wir teilen nun den Bogen hga in 4 gleiche Teile in den Punkten b, g und e, so ist abgeh das verlangte Fünfeck. (Daß die Teilung des konvexen Winkels adh in 4 gleiche Teile mit der Zirkelöffnung ad möglich ist, ist leicht einzusehen. Die der Fünfeckseite ha gegenüberliegende Ecke g liegt auf der Mittelsenkrechten von ha. Es ist dann $\sphericalangle$ hdg bzw. $\sphericalangle$ adg unter Benützung des konstanten Radius ad zu halbieren[24]).

Fig. 9.



Der Beweis ergibt sich sofort daraus, daß der $\sphericalangle$ zda des Pentagondreiecks = 72^0 ist, mithin ah die Fünfeckseite.)

c) Dritte Art (ebenfalls mit der Zirkelöffnung des Radius). Auf dem Radius ad (Fig. 10) errichten wir im Endpunkt a die Senkrechte ae, machen sie gleich ad, teilen ad in zwei Hälfte im Punkte z, ziehen ze, machen zh = ad, teilen zh in zwei Hälfte

24) Allerdings schneiden sich die von h u. g (bzw. a u. g) aus beschriebenen Bögen unter ziemlich spitzen Winkeln; es ist ja klar, daß verschiedene der Konstruktionen mit einer Zirkelöffnung in praktischer Hinsicht einiges zu wünschen übrig lassen müssen.

im Punkte t, errichten in t eine Senkrechte, die die Verlängerung von ad im Punkte i trifft, und bezeichnen von i aus mit der Zirkelöffnung ad auf dem Kreise die Punkte m und l; dann ist der Bogen ml ein Fünftel des Kreisumfanges. (Den Rest des Kreisumfanges teilt man wie bei der vorigen Aufgabe in vier gleiche Teile).

Beweis: Die Konstruktion ist ähnlich derjenigen der 4. Proportion des 3. Kap. (des Hilfssatzes zur vorigen Konstruktion). Wir ziehen zum Beweise noch dl, li und al und zeigen wie dort, daß Fläche di . ai = ad^2;[25]) aber ad = li; daher ist auch di . ai = li^2; also hat man die Proportion: di : li = li : ai[26]). Nun sind die Dreiecke dli und ali ähnlich; denn zwei Seiten derselben sind proportional und der eingeschlossene Winkel ail ist beiden Dreiecken gemeinsam; also besteht auch die Proportion: dl : al = li : ai; der aber dl = li, ist auch al = ai; aber ai ist die Zehneckseite nach Euklid XIII, 9;[27]) also ist auch al die Zehneckseite, mithin Bogen al ein Zehntel des Kreises; Bogen am aber ist = Bogen al, also der ganze Bogen ml ein Fünftel des Kreises, [mithin ml die Fünfeckseite], w.z.b.w.

Fig. 10.

3. In einen Kreis ein regelmäßiges Sechseck einzuzeichnen. (Es folgt die gewöhnliche Konstruktion mit dem Radius als Sechseckseite).

4. In einen Kreis ein regelmäßiges Siebeneck zu zeichnen. (Es folgt die angenäherte Konstruktion mit der halben Dreieckseite; dazu wird bemerkt:) „Dies ist nur angenähert, nicht genau die Siebeneckseite . . . . Es sagt Al-Gundadjânî[28]): Es gibt keinen Beweis für diesen Satz, wir sagen nur, wir können im Kreis (sieben) Sehnen ziehen, von denen jede die Hälfte der Seite des regelmäßigen Dreiecks ist, das wir in diesen Kreis zeichnen können; diese halbe Seite ist eben angenähert gleich der Siebeneckseite, merke dir das!“

5. In einen Kreis ein regelmäßiges Achteck zu zeichnen. (Gewöhnliche Konstruktion durch Halbierung der Viertelskreise über den Seiten des eingeschriebenen Quadrates.)[29])

6. In einen Kreis ein regelmäßiges Neuneck zu zeichnen.

(Man zeichnet das gleichseitige Dreieck in den Kreis und teilt jeden seiner Bogen in 3 gleiche Teile (nach der bekannten Konstruktion mit Hilfe der Be-

25) D. h., daß di im Punkte a nach dem goldenen Schnitt geteilt ist.

26) Die Handschrift hat al.

27) Hier hat der Text ein ganz falsches Zitat, nämlich III, 12; überhaupt ist dieser Beweis im Text nicht ganz korrekt, es kommen einige Auslassungen und falsche Buchstaben vor, die nicht zu denen der Figur passen.

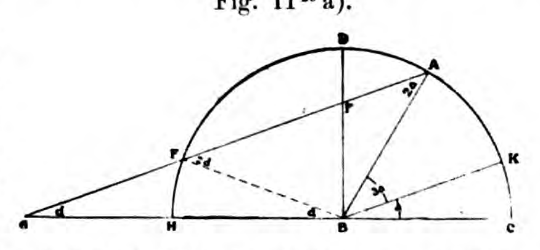
28) D. h. ein Bewohner von Gundadjân, einer Stadt in Khûzistân; in welcher Beziehung dieser Gundadjânî zu Abû'l Wefâ' steht, können wir nicht sagen, vielleicht ist er der Übersetzer dieser Konstruktionen ins Persische, der in der Pariser Handschrift 169 Abû Isḥaḳ Ibn ʿAbd Allâh al-Kûbinânî oder Kûtibânî — die Lesart ist unsicher — genannt wird.

29) Bei W. nicht ausgeführt.



wegungsgeometrie, die im 2. Kapitel (bei W. 1. Kap., Nr. 17 und 18) behandelt wird, in unserer Handschrift aber fehlt; wir geben sie kurz wieder: Der zu teilende Winkel sei $ABC = 3\alpha$ (Fig. 11); man beschreibt aus B mit beliebigem Radius r den Halbkreis CAH, errichtet in B die Senkrechte BD, dreht dann um A ein Lineal so lange, bis $EF = FG = r$ wird, dann ist $\sphericalangle G = \alpha$; zieht man durch B die Parallele BK zu GA, so ist $\sphericalangle KBC$ der 3. Teil des $\sphericalangle ABC$, (denn $\sphericalangle FGB = \sphericalangle FBG$; $\sphericalangle AFB = 2 \sphericalangle FBG = \sphericalangle FAB$; $\sphericalangle BFA + \sphericalangle FAB = 4 \sphericalangle FBG = \sphericalangle ABC + \sphericalangle FBG$; $3 \sphericalangle FBG = \sphericalangle ABC = 3\alpha$; also $\sphericalangle FBG = \sphericalangle FGB = \alpha$). Die Senkrechte BD wäre übrigens nicht notwendig; man braucht einfach das Lineal um A so lange zu drehen, bis $GF = r$ wird. Diese Konstruktion, die von verschiedenen arabischen Geometern noch etwas verändert wird[30]) und sich auch bei Jordanus de triangulis[31]) findet, geht in letzter Linie auf Satz VIII des Liber assumptorum des Archimedes zurück[32]).

Fig. 11[29]a).



7. In einen Kreis ein regelmäßiges Zehneck zu zeichnen.[33])

(Es wird sowohl die Konstruktion vermittels des Fünfecks und Halbierung eines Bogens angeführt als auch die direkte, bei welcher der kleinere Teil des nach dem goldenen Schnitt geteilten Radius die Zehneckseite ist).

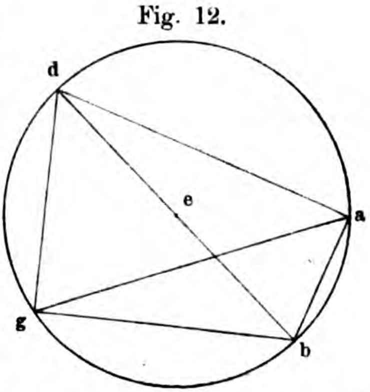
Fünftes[34]) Kapitel. Über die Konstruktion der den Figuren umbeschriebenen Kreise.

1. Um ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben (besser: durch 3 Punkte einen Kreis zu legen).

a) Erste Art. (Die gewöhnliche Konstruktion mit den Mittelsenkrechten; es wird auf Euklids Elemente, III. Buch verwiesen.)

b)[35]) Das Dreieck sei abg (Fig. 12), man zieht die Senkrechten [in a bezw. g] auf ab und bg, sie seien ad und gd, zieht bd, halbiert sie im Punkte e, dann ist dies der Mittelpunkt des Kreises, der durch die Punkte a, b, g (und d) geht. (Dazu wird noch ein ziemlich weitläufiger Beweis gegeben, dem zunächst noch Hilfssätze vorausgeschickt werden, und den wir weglassen. Die Konstruktion wird zurückgeführt auf die zweier rechtwinkliger Dreiecke im Kreis, deren gemeinsame Hypotenuse vom Mittelpunkt des gesuchten Kreises halbiert wird.)

Fig. 12.



29 a) In Fig. 11 steht fälschlicherweise a bezw. d statt α und F auf der Geraden DFB statt E.

30) Vergl. F. Woepcke, L'Algèbre de d'Omer Alkhappâmi S. 117—125. Paris 1851.

31) Ausgabe von M. Curtze, S. 38—39. Thorn 1887.

32) Vergl. Archimedis opera, ed. Heiberg, II, 437 (II_2, 518). Leipzig 1910—15.

33) Bei W. nicht ausgeführt.

34) Bei W. viertes Kapitel.

35) Bei W. nicht ausgeführt.



2. Um ein Quadrat einen Kreis zu beschreiben (durch Ziehen der Diagonalen).

3. Um ein (regelmäßiges) Fünfeck einen Kreis zu beschreiben. (Die Konstruktion ist die gewöhnliche, d. h. auf zwei Seiten werden die Mittelsenkrechten errichtet, ihr Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des Kreises unter Hinweis auf Euklid III, B. Satz 1).

4. Um ein (regelmäßiges) Sechseck einen Kreis zu beschreiben. (Von 2 Eckpunkten des Sechsecks werden mit der Sechseckseite 2 Kreisbögen beschrieben, deren Schnittpunkt der Mittelpunkt des gesuchten Kreises ist. Das Elementardreieck des Sechsecks ist ja gleichseitig. Dies ist wiederum eine Aufgabe, die mit konstanter Zirkelöffnung gelöst wird. Am Schluß dieser Aufgabe steht die Bemerkung:) „Es sagt Abu'l Wefâ': Was die übrigen Vielecke anbetrifft, so wird die Konstruktion des umbeschriebenen Kreises auf dieselbe Weise ausgeführt, wie es beim Fünfeck geschehen ist, nämlich durch die Konstruktion der Mittelsenkrechten zweier Seiten“ (der Durchschnittspunkt derselben ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises).

Sechstes Kapitel. Über die Konstruktion der den Figuren einbeschriebenen Kreise.

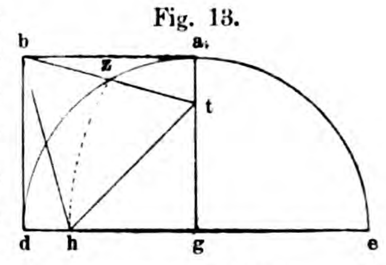
1. In ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben[36]).

(Gewöhnliche Konstruktion durch Winkelhalbierung. Am Schlusse dieser Aufgabe wird bemerkt:) „Durch dieselbe Art ist es möglich, daß wir in andere Figuren mit gleichen Seiten und Winkeln Kreise einbeschreiben. Dazu halbieren wir zwei ihrer Winkel; dann ist der Schnittpunkt der beiden [Halbierungs-]Linien der Mittelpunkt des Kreises, welcher der Figur einbeschrieben ist. Der Beweis hiefür ist eben der Beweis, den Euklid gegeben hat. Abu'l Wefâ' erwähnt die Teilung des Winkels in 2 Hälfte und ebenso erwähnt ihn Euklid. Daher bedarf es keines anderen Beweises.“

Siebentes Kapitel. Ein gleichseitiges Dreieck in ein Quadrat einzubeschreiben, so daß dessen Seiten die Ecken (des eingezeichneten Dreiecks) berühren.

Verlängere die Seite dg des Quadrates (Fig. 13) bis e, mache ge = dg, beschreibe über de den Halbkreis dae, ferner von d aus einen Bogen mit dem Radius dg, der den Halbkreis in z schneidet, von e aus einen Bogen mit dem Radius ez, der dg in h schneidet, mache at = dh und ziehe bh, bt, th, so ist bth das verlangte Dreieck.

Fig. 13.



Beweis: Dazu ist ein Hilfssatz notwendig, den wir vorausschicken. Es sei Kreis abg (Fig. 14) gegeben, ag sein Durchmesser und gb die Seite des regelmäßigen Sechsecks; man ziehe die Linie ab, sie ist die Seite des regelmäßigen Dreiecks, man verlängere sie bis d, so daß ad = ag sei, und ziehe dg; da nun

36) Das Dreieck ist nicht regelmäßig vorausgesetzt.

Bogen ab das Doppelte des Bogens bg ist, ist der ∢ agb das Doppelte des ∢ bag, beide sind aber zusammen = R, also ist ∢ agb = $\frac{2}{3}$R und bag = $\frac{1}{3}$R; daher bleibt für die ∢ agd und ∢ adg $1\frac{2}{3}$R; da sie gleich groß sind, ist jeder von ihnen $\frac{1}{2}$R + $\frac{1}{3}$R (= 75°); da ∢ agb = $\frac{2}{3}$R, ist ∢ bgd = $\frac{1}{6}$R (= 15°); also ist damit bewiesen, daß, wenn in einem rechtwinkligen Dreieck die beiden Katheten die Sechseckseite und der Überschuß des Durchmessers über die Dreieckseite sind, der kleinere Winkel dieses Dreiecks = $\frac{1}{6}$R (= 15°) ist. — Nun ist in unserer vorigen Figur im Dreieck bhd der Winkel d = R, er wird gebildet von bd, d. h. der Sechseckseite des Kreises ead, und dh, das der Überschuß des Durchmessers ed[37]) über ez, der Dreieckseite, ist; also ist nach dem Hilfssatz ∢ dbh[38]) = $\frac{1}{6}$R. Da die Linien ab und at gleich den Linien bd und dh sind, und die Winkel [bei] a und d beide = R sind, ist der ∢ abt auch = $\frac{1}{6}$R; also ∢ tbh = $\frac{2}{3}$R (= 60°); aber die beiden ∢ bth und ∢ bht sind einander gleich; also ist jeder von ihnen auch = $\frac{2}{3}$R; deshalb sind die 3 Seiten bt, bh, th gleich groß, und das Dreieck tbh ist gleichseitig, w.z.b.w.

Fig. 14.

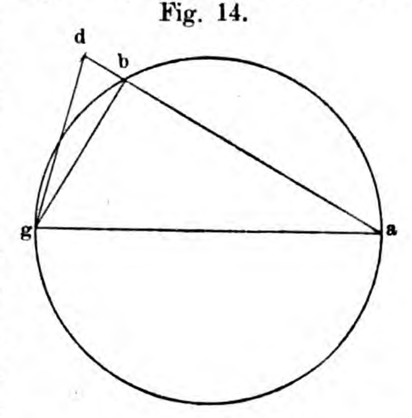
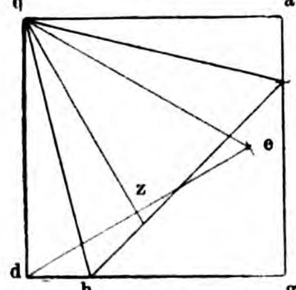


Fig. 15.



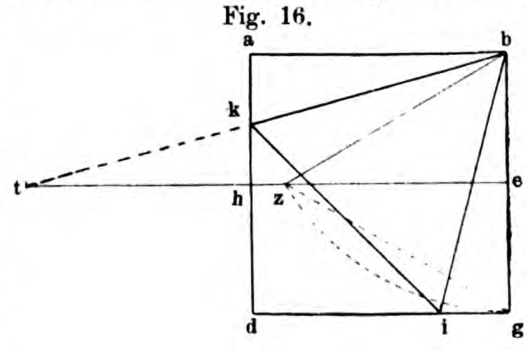
2. Methode. Wir konstruieren über bd (Fig. 15) das gleichseitige Dreieck bde und teilen den ∢ ebd in 2 Hälfte durch die Linie bz; wir teilen auch den ∢ zbd in 2 Hälfte durch die Linie bh, machen at = dh und ziehen bh, th, bt, so ist das △ bht gleichseitig.

(Den Beweis lassen wir hier weg. Die Konstruktion wird zurückgeführt auf die des ∢ dbh = 15° und damit auf die vorhergehende Konstruktion.)

3. Methode.[39]). Wir teilen jede der Seiten ad, bg (Fig. 16) in den Punkten e und h in 2 Hälfte, ziehen eh, beschreiben von b aus einen Bogen mit dem Radius bg, der eh in z schneidet, verlängern eh über h hinaus bis t, so daß zt = zb = bg wird, ziehen die Linie bt, die ad in k schneidet, machen gi = ak, ziehen die Linien ki und bi; dann ist bki das verlangte Dreieck.

Beweis: Man ziehe bz, zg; da nun ez senkrecht auf bg und bz = bg ist, ist das △ bzg gleichseitig; also ∢ bze = $\frac{1}{3}$R; da ferner zt = bz, sind die Winkel zbt und ztb gleich, ihre Summe aber ist gleich ∢ bze, also ist jeder der Winkel zbt und ztb = $\frac{1}{6}$R (= 15°); aber ∢ ztb = ∢ abt als Wechselwinkel; also ist auch ∢ abt = $\frac{1}{6}$R; ferner ist gi = ak;

Fig. 16.



37) Der Text hat ah.

38) Der Text hat bhd.

39) Der Text hat: „3. Methode, es ist die 4. über die Konstruktion".



als ∢ gbi auch $= \frac{1}{6}$R; daher ist nach dem oben Bewiesenen △ bki gleichseitig, w. z. b. w.

Methode[40]). Wir teilen jede der Seiten ad und bg (Fig. 17) in 2 Hälfte in den Punkten e und z, ziehen ez und beschreiben von a aus mit dem Radius ab den Bogen bd, der ez im Punkte h schneidet; dann machen wir sowohl gt als auch ai = 2h und ziehen dt, di, ti, so ist dti das verlangte Dreieck.

Beweis: (Es wird zuerst ein Hilfssatz vorausgeschickt, in welchem bewiesen wird, daß die Dreieckseite im Kreise den senkreckt auf sie gezogenen Radius halbiert (an Hand der Figur 18), hierauf fährt der Beweis in folgender

Fig. 17.

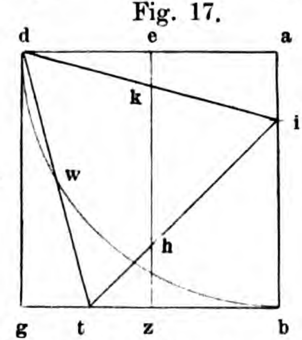
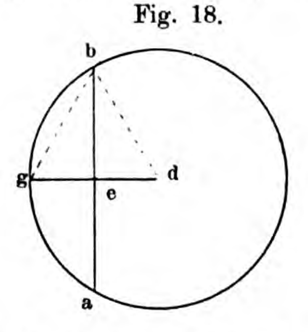


Fig. 18.



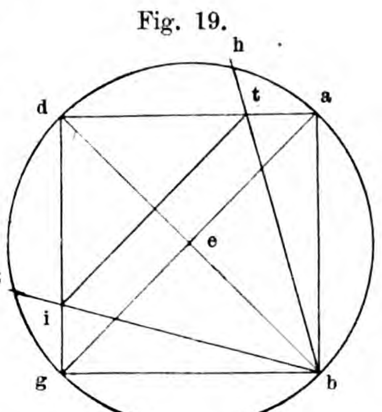
Weise fort): Da nun ez = ab = Radius ist und eh die halbe Dreieckseite, so ist hz der Überschuß des Radius über die halbe Dreieckseite, also (sind die Strecken) gt sowohl als ai, die man gleich 2hz gemacht hat, der Überschuß des Durchmessers über die Dreieckseite; mithin ist, da ad sowohl als dg = dem Radius oder der Sechseckseite sind, nach dem Hilfssatz zur Konstruktion (1. Methode) ∢ adi sowohl als ∢ gdt $= \frac{1}{6}$R (= 15°); also ist △ dit nach den vorigen Beweisen gleichseitig.

(Die Konstruktionsbeschreibung des Textes sowohl als die Figur machen es aber wahrscheinlich, daß hier zwei oder sogar drei Konstruktionen in eine zusammengezogen sind; denn erstens könnte man einfach ek = hz machen, da ek $= \frac{1}{2}$ai; dann hätte man die Seite dki; oder zweitens könnte man den Bogen dw = bh machen, so hätte man die Seite dwt. Trägt man nämlich den Bogen bh von d aus auf dem Viertelskreis ab, so entspricht dem Punkt h in diesem Fall der Punkt w. Es muß daher w auf der Mittellinie liegen, die die beiden Quadratseiten dg und ab halbiert. Das zwischen den Dreieckseiten gd und dt liegende Stück der Mittellinie ist $= \frac{1}{2}$gt wie bei der vorhergehenden Konstruktion. Diese 3. Art ist wie die zweite einfacher als die erste Konstruktion, die wegen der Verdopplung der Strecke hz eine Fehlerquelle in sich birgt. Diese dritte Möglichkeit ist die von Woepcke gegebene, die etwas von der obigen abweicht.

40) Der Text hat: „4. Methode, es ist die 3. über die Konstruktion". In der persischen Handschrift des Woepcke ist diese Methode in der Tat die 3. und die obere die 4. Daraus könnte man schließen, daß der Verfasser eine andere Handschrift zur Vorlage hatte und unsere nicht die Originalarbeit ist. In dieser Konstruktion und dem Beweise finden sich verschiedene Auslassungen, der Text ist stark verdorben, es mußten also die Lücken ergänzt werden. Die Darstellung weicht nun ziemlich vom Wortlaut des Textes ab.

g wird mit h verbunden. Diese Verbindungslinie schneidet ab im Punkte r. Auf d a wird die Strecke dm = br abgetragen. △ grm ist das gesuchte. Die Richtigkeit folgt aus obigem Beweis[41]).)

Fig. 19.



5. Methode. Man konstruiert (Fig. 19) den dem Quadrate umbeschriebenen Kreis, (dazu) zieht man die beiden Durchmesser (Diagonalen) ag und bd die sich in e schneiden. Von d aus beschreibt man mit dem Radius de einen Bogen, der den Kreis in den Punkten h und z schneidet, zieht bz und bh, welche ad und gd in den Punkten t und i schneiden, und ferner ti, so ist bti das verlangte Dreieck.

Beweis: Da dh und dz = de, d. h. = dem Radius gemacht wurden, so ist Bogen zh = $\frac{1}{3}$ des Kreisumfanges (= 120°), also ∢ zbh = $\frac{2}{3}$R (=60°)[42]), mithin ist jeder der Winkel hbd und zbd = $\frac{1}{3}$R (= 30°); aber die Winkel abd und gbd sind je = $\frac{1}{2}$R (= 45°); mithin ist jeder der Winkel abt und gbi = $\frac{1}{6}$R (= 15°); also ist das △ bti nach dem vorigen Beweis gleichseitig.

41) Der Text ist, wie gesagt, ganz lückenhaft, doch kommt darin die Linie dw mit Verlängerung nach t vor.

42) Hier bricht der Beweis ab und mit ihm auch die Handschrift.


Digitized by Google

